МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А.І. Колосов, Л.Б. Коваленко,
С.О.Станішевський, А.В. Якунін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

для практичних занять та самостійної роботи студентів 1 і 2 курсів денної і заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030601 – “Менеджмент” і 6.030504 – “Економіка підприємства”

ХАРКІВ – ХНАМГ − 2009

Методичні вказівки з дискретної математики (для практичних занять та самостійної роботи студентів 1 і 2 курсів денної і заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030601 – “Менеджмент” і 6.030504 – “Економіка підприємства”) / Укл.: Колосов А.І., Коваленко Л.Б., Станішевський С.О., Якунін А.В. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 123 с.

Укладачі: Анатолій Іванович Колосов,
Людмила Борисівна Коваленко,
Степан Олександрович Станішевський,
Анатолій Вікторович Якунін

У цих методичних вказівках викладено теорію множин і відношень; алгебру логіки і алгебру логіки висловлень та теорію графів і теорію алгоритмів і автоматів, елементи комбінаторики.

Кожен розділ складається з основних визначень, властивостей, операцій і теорем; має значну кількість розв’язаних і ілюстрованих прикладів з об’єктами дискретної природи; містить вправи для аудиторної і самостійної роботи.

У додатку наведено завдання для модульної контрольної роботи.

Рекомендовано кафедрою вищої математики для студентів спеціальностей менеджменту і економіки підприємництва. Протокол № 3 від 24.10.2009 р.

Рецензент: професор кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, доктор фізико-математичних наук, проф. М.Й. Кадець

ПЕРЕДМОВА

Для багатьох економічних та інших систем характерна їх дискретність функціонування у просторі й часі. Основу сучасних технологій становить комп'ютерна техніка, де подання інформації та її обробка є дискретними. Дискретні уявлення потребують обґрунтування і спеціальних методів кількісного аналізу, для чого залучається апарат дискретної математики. Основним об'єктом дискретної математики служить множина, а структуру дискретної моделі формують відношення між її елементами.

Для розуміння матеріалу, викладеного в навчальному посібнику, досить мати знання в обсязі курсу математики за середню школу.

Це дає можливість студентам різних спеціальностей і форм навчання вивчати дискретну математику самостійно для подальшого використання її у природничих науках, які інтенсивно розвиваються на базі розробок з використанням дискретної інформації (слова, конструкції мов і граматик; таблиці даних наукових спостережень; статистичні таблиці господарської діяльності, соціального і демографічного розвитку суспільства) і новітніх комп'ютерних технологій.

У список літератури включено джерела для первинного вивчення дискретної математики і книги для бажаючих більш повно і глибоко засвоїти окремі розділи та їх застосування.

У додатку наведено завдання для модульної контрольної роботи.

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Визначення 1.1. ***Множиною*** є сукупність визначених об'єктів, різних між собою, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю.

Визначення 1.2. Якщо a один з об'єктів множини A, то говорять, що a - *елемент множини* A, або a *належить* A.

Домовимося позначати множини рядковими латинськими літерами $A, B, C, \ldots$, а елементи множини – прописними латинськими літерами $a, b, c, \ldots$

Способи завдання множин:

- ***перерахуванням,*** тобто списком всіх своїх елементів. Такий спосіб завдання прийнятний тільки при завданні кінцевих множин. Позначення списку – у фігурних дужках. Наприклад, множина, що є з перших п'яти простих чисел $A=\{2,3,5,7,11\}$. Множина спортсменів університетської хокейної команди:

B={*Іванов, Петров, Сидоров, Бубликов, Сироєжкін, Волосюк*};

- ***процедурою***, що породжує і описує спосіб одержання елементів множини із вже отриманих елементів або з інших об'єктів. Наприклад, множина всіх цілих чисел, що є степенями двійки $M_{2^n},\ n \in N$, де N - множина натуральних чисел, може бути представлена процедурою, заданою двома правилами, названими рекурсивними: а) $1 \in M_{2^n}$; б) якщо $m \in M$, тоді $2m \in M_{2^n}$;

- ***описом характеристичних властивостей***, якими повинні володіти елементи множини. Так, множина A, що складається з таких елементів x, які мають властивість $P(x)$, позначимо в такий спосіб:

$$A = \{x | P(x)\}.$$

Так, розглянута вище множина всіх цілих чисел, що є степенями числа 2 може бути записана як $A = \{x | x = 2^n, n \in N\}$. До A ще треба додати 1.

Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$. Якщо a не є елементом множини A, то пишуть $a \notin A$. Наприклад, $5 \in \{1,3,5,7\}$, але $4 \notin \{1,3,5,7\}$. Якщо $A = \{x | \text{студентка групи МОМГ}\}$, то $\text{Іванова} \in A$, а $\text{Петрова} \notin A$.

<u>Визначення 1.3.</u> Множина A називається ***підмножиною*** (або ***включенням***) множини B $(A \subseteq B)$, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, тобто, якщо $x \in A$, то $x \in B$.

Якщо $A \subseteq B$ й $A \neq B$, то A називається строгою підмножиною й позначається $A \subset B$.

<u>Визначення 1.4.</u> Дві множини рівні $(A = B)$, якщо всі їхні елементи збігаються. Множини A і B рівні, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*, у протилежному випадку – *нескінченною*. Кількість елементів у скінченій множині A називається *потужністю* множини A і позначається $|A|$.

Визначення 1.5. Множина, що не містить елементів, називається *порожньою множиною*, і позначається $\varnothing$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини. *Універсальна множина* U є множина, що володіє такою властивістю, що всі розглянуті множини є його підмножинами.

Варто розрізняти поняття належності елементів множини і включення! Так, наприклад, якщо множина $A=\{1,3,6,13\}$, то $3\in A$, $6\in A$, але $\{3,6\}\notin A$, у той час як $\{3,6\}\subseteq A$.

Визначення 1.6. Множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини A, називається *булеаном* $P(A)$. Потужність булеана $|P(A)| = 2^{|A|}$.

Приклад 1.1. Нехай $A=\{a, b, c, d\}$. Визначити булеан множини A. Яка потужність множини $P(A)$?

Розв'язання:

$$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\},$$

$$\{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}.$$

Потужність $|P(A)|=16$.

1.2. Операції над множинами

Визначення 1.7. *Об'єднанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать хоча б однієї з множин A або B. Об'єднання множин A і B позначається $A\cup B$. Це визначення рівносильне наступному: $A\cup B=\{x | x\in A \ \textit{або} \ x\in B\}$.

Приклад 1.2. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A\cup B$.

Розв'язання: $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$.

Визначення 1.8. *Перетинанням* множин A і B називається множина, що складається із всіх тих елементів, які належать і множині A й множині B. Перетинання множин A і B позначається $A\cap B$. Це визначення рівносильне наступному: $A\cap B=\{x|x\in A\ \ i\ \ x\in B\}$.

Приклад 1.3. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A\cap B$.

Розв'язання: $A\cap B=\{2, 3, 7\}$.

Визначення 1.9. *Доповненням* (або *абсолютним доповненням)* множини A називається множина, що складається із всіх елементів універсальної множини, які не належать A. Доповнення множини A позначається $\overline{A}$. Це визначення рівносильне наступному:
$\overline{A}=U-A=\{x|x\in U\ \ i\ \ x\notin A\}$.

Визначення 1.10. *Різницею* множин A й B (або *відносним доповненням)* називається множина, що складається із всіх елементів множини A, які не належать B. Різницю множин A і B позначають $A-B$. Це визначення рівносильне наступному: $A-B=\{x|x\in A\ \ i\ \ x\notin B\}$.

Приклад 1.4. Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A-B$.

Розв'язання: $A-B=\{5, 6\}$.

<u>Визначення 1.11.</u> *Симетричною різницею* множин A і B називається множина, що складається з об'єднання всіх елементів, що належать множині A і не містяться в B, і елементів, що належать множині B і не містяться в A. Симетрична різниця множин A і B позначається $A+B$. Це визначення рівносильне наступному: $A+B=(A-B)\cup(B-A)$.

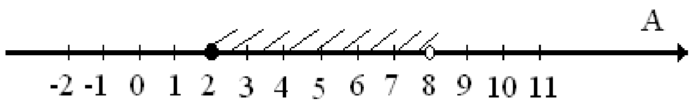
<u>Визначення 1.12.</u> Операції, які виконують над однією множиною, називають *унарними*. Операції, які виконують над двома множинами, називають *бінарними*. Прикладом унарної операції є знаходження доповнення. Прикладами бінарних операцій є об'єднання, перетинання, різниця, симетрична різниця.

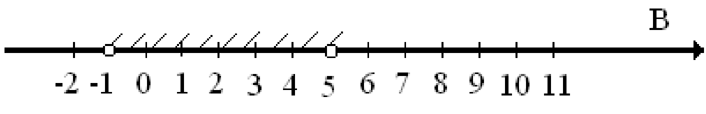
<u>Приклад 1.5.</u> Нехай $A=\{2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 7, 9\}$. Знайти $A+B$.

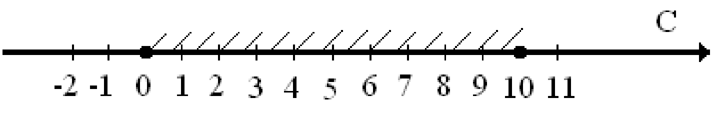
Розв'язання: $A+B=\{1, 5, 6, 9\}$.

<u>Приклад 1.6.</u> Нехай $A=[2, 8)$, $B=(-1, 5)$; $C=[0, 10]$. Знайти $A\cup B$, $B\cap C$, $C-A$, $B+C$, $\overline{B}$.

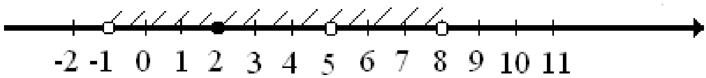
Розв'язання: Зобразимо задані множини на числовій вісі



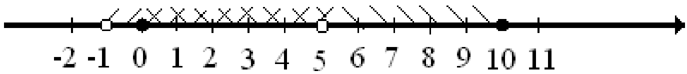




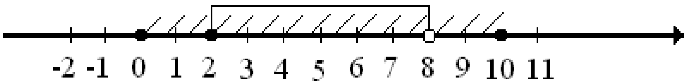
Тоді шукані множини будуть мати вигляд (рис. 1.1):



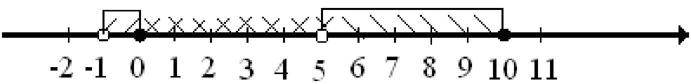
$$A \cup B = (-1, 8);$$



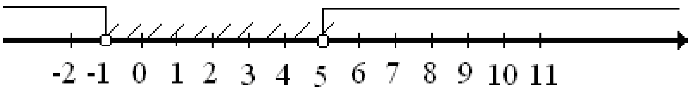
$$B \cap C = [0, 5);$$



$$C - A = [0, 2) \cup [8, 10];$$



$$B + C = (-1, 0) \cup [5, 10];$$



$$\overline{B} = (-\infty, -1] \cup [5, \infty).$$

Рис. 1.1.

1.3. **Діаграми Венна**

Для графічної ілюстрації відносин між множинами даної універсальної множини U використують діаграми Венна. Діаграма Венна – це зображення множини у вигляді геометричної множини, наприклад, кола. При цьому універсальну множину зображують у вигляді прямокутника. На рис. 1.2 зображені діаграми Венна для розглянутих операцій над множинами.

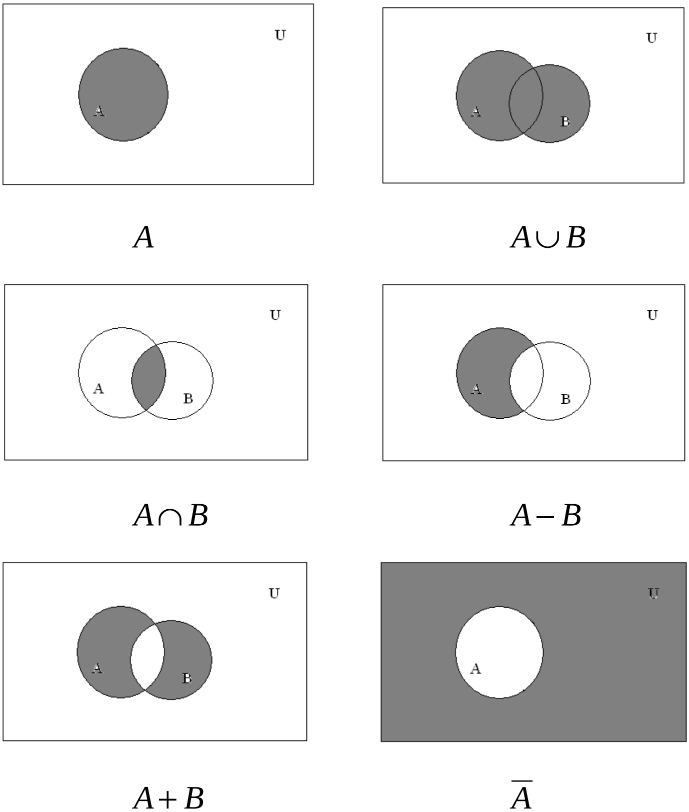


Рис. 1.2.

<u>Теорема 1.</u> Для будь-яких підмножин A, B, C універсальної множини U справедливо наступне:

а) закони ідемпотентності $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

б) подвійне доповнення $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$;

в) закони де Моргана

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) властивості комутативності
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

д) властивості асоціативності

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

е) властивості дистрибутивності

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C);$$

ж) властивості тотожності
$A \cup \varnothing = A$; $A \cap U = A$;

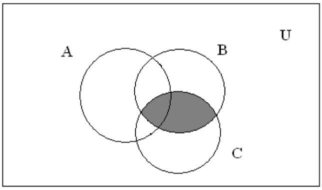
з) властивості доповнення
$A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
Пріоритет операцій:

1. $\overline{A}$; 2. $A \cap B$ або $A \cup B$; 3. $A - B$; 4. $A + B$

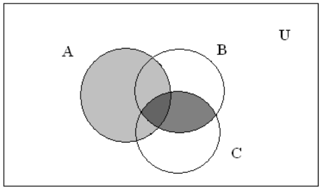
<u>Приклад 1.7.</u> Покажіть, що $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Розв'язання: Доведемо цю властивість асоціативності, скориставшись діаграмами Венна (рис. 1.3):

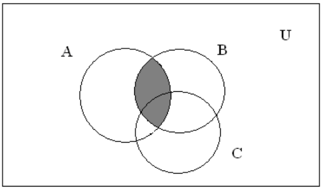
Як бачимо з рис. 1.3 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, що й треба було довести.



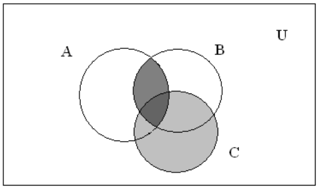
$B \cap C$



$A \cap (B \cap C)$



$A \cap B$



$(A \cap B) \cap C$

Рис. 1.3.

2. ВІДНОШЕННЯ

2.1. Основні визначення

<u>Визначення 2.1.</u> *Упорядкована пара предметів* – це сукупність, що складається із двох предметів, розташованих у деякому певному порядку. При цьому впорядкована пара має наступні властивості:

а) для будь-яких двох предметів x і y існує об'єкт, який можна позначити як $\langle x, y \rangle$, названий упорядкованою парою;

б) якщо $\langle x, y \rangle$ і $\langle u, v \rangle$ - упорядковані пари, то $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ тоді і тільки тоді, коли $x = u$, $y = v$.

При цьому x будемо називати першою координатою, а y - другою координатою впорядкованої пари $\langle x, y \rangle$.

<u>Визначення 2.2.</u> *Бінарним* (або *двомісним*) відношенням R називається підмножина впорядкованих пар, тобто множина, кожен елемент якого є впорядкована пара.

Якщо R є деяке відношення, це записують як $\langle x, y \rangle \in R$ або xRy.

Один з типів відношень − це множина всіх таких пар $\langle x, y \rangle$, що x є елемент деякої фіксованої множини X, а y − елемент деякої фіксованої множини Y. Таке відношення називається *прямим* або *декартовим добутком*.

<u>Визначення 2.3.</u> *Декартів добуток* $X \times Y$ множин X і Y є *множина* $\{\langle x, y \rangle | x \in X, y \in Y\}$.

При цьому множина X називається *областю визначення* відношення R, а Y - його *областю значень*:
$D(R) = \{x | \langle x, y \rangle \in R\}$; $E(R) = \{y | \langle x, y \rangle \in R\}$ (див. рис. 2.1).

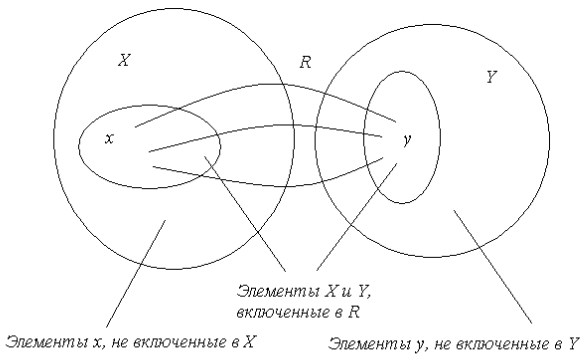


Рис. 2.1.

Приклад 2.1. Знайти області визначення і значень відношення $A=\{\langle a,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle c,5\rangle,\langle e,7\rangle\}$.

Розв'язання: Область визначення заданого відношення $D(A)=\{a,c,e\}$, а область значень - $E(A)=\{1,2,5,7\}$.

Скориставшись визначенням декартового добутку, можемо дати ще одне визначення бінарного відношення:

Визначення 2.4. *Бінарним* відношенням R називається підмножина пар $\langle x,y\rangle\in R$ прямого добутку $X\times Y$, тобто $R\subseteq X\times Y$.

Надалі ми будемо розглядати лише бінарні відношення, тому замість терміна "бінарне відношення" будемо вживати термін "відношення".

Розглянемо кілька прикладів відношень:

1. Якщо R − множина дійсних чисел, тобто $\left\{\langle x,y\rangle\in R\left|\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right.\right\}$ - бінарне відношення на R. Графічно його зобразити можна в такий спосіб (рис. 2.2):

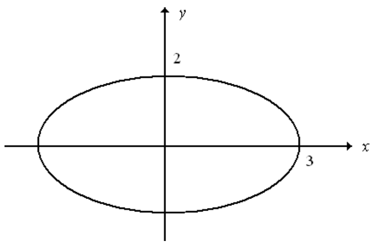


Рис. 2.2.

2. Якщо N – множина натуральних чисел, то відношення $\{\langle x, y\rangle \in N \times N | x \geq y\}$ виконується для пар $\langle 5,3\rangle$, $\langle 7,1\rangle$, $\langle 2,2\rangle$, але не виконується для пар $\langle 1,7\rangle$, $\langle 9,11\rangle$, $\langle 2,5\rangle$.

3. Якщо X – множина студентів Академії, а Y – множина груп Академії, то відношення множин X і Y – є множина $\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | x - \text{ студент групи } y\}$.

4. Якщо X – множина товарів у магазині, а $Y = R^+$ – множина дійсних додатних чисел, то відношення множин X й Y – є множина $\{\langle x, y\rangle \in X \times Y | y - \text{ціна } x\}$.

У силу визначення бінарних відношень, як *спосіб їх завдання* можуть бути використані будь-які способи завдання множин. Відношення, визначені на кінцевих множинах, звичайно задаються:

1. *Списком (перерахуванням)* упорядкованих пар, для яких це відношення виконується.

2. *Матрицею* – бінарному відношенню $R \subseteq X \times X$, де $B \times A$ відповідає квадратна матриця порядку n, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює 1, якщо між x_i й x_j є відношення R, і 0, у протилежному випадку, тобто:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i R x_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

<u>Приклад 2.2.</u> Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Знайти декартовий добуток множин $A \times B$ й $B \times A$. Записати $(A \times B) - (B \times A)$, $(A \times B) \cap (B \times A)$, $(A \times B) + (B \times A)$.

Розв'язання:

$A \times B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$;

$$B\times A=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\};$$

$$(A\times B)-(B\times A)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\};$$

$$(A\times B)\cap(B\times A)=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\};$$

$$(A\times B)+(B\times A)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,$$
$$\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}.$$

2.2. **Функції**

<u>Визначення 2.5.</u> *Функцією* f називається таке відношення R, ніякі два різних елементи якого не мають однакових перших координат. Тобто f є функцією тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє наступним умовам:

- елементами f є упорядковані пари;

- якщо упорядковані пари $\langle a,b\rangle$ і $\langle a,c\rangle$ - елементи функції f, то $b=c$.

Отже, відношення f на $A\times B$ називається функцією з A в B і позначається як $f:A\to B$.

Якщо $f:A\to B$ функція і $\langle a,b\rangle\in f$, то говорять, що $b=f(a)$.

<u>Визначення 2.6.</u> Множина A називається *областю визначення* функції f і позначається $D(f)$, а множина B - *областю потенційних значень*. Якщо $I\subseteq A$, то множина

$f(I) = \{b | f(a) = b$ для деякого $a \in I\}$ називається *образом* множини I. Образ усієї множини A називається *областю значень* функції f і позначається $E(f)$.

Приклад 2.3. Які із представлених відношень є функціями:

а) $\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 4,9\rangle,\langle 2,13\rangle\}$; б) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$;

в) $\{\langle x,x^2\rangle | x\in R\}$; г) $\{\langle x^2,x\rangle | x\in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що два елементи $\langle 2,7\rangle$ і $\langle 2,13\rangle$ мають однакову першу координату;

б) відношення є функцією, тому що перший елемент кожної впорядкованої пари зустрічається рівно один раз;

в) відношення є функцією, графіком якої буде парабола;

г) відношення не є функцією, тому що його елементами є, наприклад, і $\langle 1,1\rangle$, і $\langle 1,-1\rangle$.

Приклад 2.4. Знайти область визначення і область значень функції:

а) $\{\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 1,11,\rangle\langle 7,2\rangle\}$; б) $\{\langle x,x^2\rangle | x\in R\}$.

Розв'язання:

а) область визначення функції $A=\{1,4,5,7\}$, а область значень - $B=\{2,3,11\}$;

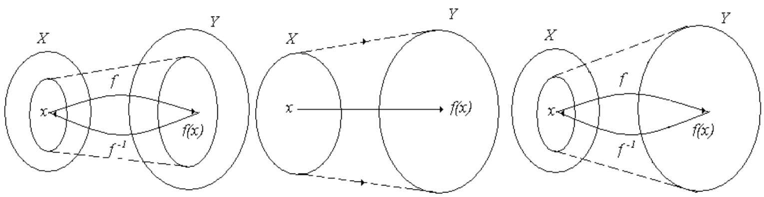
б) область визначення - $x \in R$, а область значень - $y \in R^{+}$.

Визначення 2.7. Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, або *ін'єкцією*, якщо з $f(a) = f(a')$ прямує $a = a'$ (рис. 2.4,а). Функція $f : A \to B$ називається *"відображенням на"*, *сюр'єктивною* функцією, або *сюр'єкцією*, якщо для кожного $b \in B$ існує деяке $a \in A$ таке, що $f(a) = b$ (рис. 2.4,б). Функція, що є одночасно і ін'єктивною і сюр'єктивною, називається *бієктивною* або *взаємнооднозначною* (рис. 2.4,в).

Можна привести ще одне визначення взаємнооднозначної функції.

Визначення 2.8. Функція $f : A \to B$ називається *взаємнооднозначною*, якщо вона переводить різні елементи в різні. Тобто з умови $a \neq a'$ прямує $f(a) \neq f(a')$.

Якщо R^{-1} - обернене відношення до взаємно-однозначного функціонального відношення R, то R^{-1} визначає функцію f^{-1}, яку називають *оберненою* до функції f.



(а) (б) (в)

Рис. 2.4.

Ін'єктивна функція f має обернену функцію f^{-1}.

Функція f^{-1}, обернена до бієктивної, є відображенням не на множину X , а в множину X .

Взаємнооднозначність функції зручно доводити виходячи з міркувань:

"з умови $f(x_1) = f(x_2)$ прямує $x_1 = x_2$".

<u>Приклад 2.5.</u> Чи є функція $f(x) = 3x + 5$ взаємно-однозначною?

Розв'язання:

$f(x_1) = 3x_1 + 5$; $f(x_2) = 3x_2 + 5$. З умови $f(x_1) = f(x_2)$ прямує; $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$. Отже $x_1 = x_2$ і функція є взаємно-однязначною.

<u>Визначення 2.9.</u> Нехай f - функція із множини A в множину B, тобто $f : A \to B$ $\left(f \subseteq A \times B\right)$. *Обернене відношення* $f^{-1} \subseteq B \times A$ визначається як $f^{-1} = \{\langle b, a \rangle | \langle a, b \rangle \in f\}$ При цьому f^{-1} називається *перетворенням* функції f , або її *оберненою функцією*.

<u>Приклад 2.6.</u> Знайти функцію, обернену до даної: $y = 5x - 1$.

Розв'язання: Обертаючи функцію, одержуємо $\{\langle y, x \rangle | y = 5x - 1,\ x, y \in R\}$, але це те ж саме, що і $\{\langle x, y \rangle | x = 5y - 1,\ x, y \in R\}$. Розв'яжемо рівняння відносно y , одержимо $\left\{\langle x, y \rangle \middle| y = \frac{1}{5}(x + 1),\ x, y \in R\right\}$.

Тобто, якщо $f = \{\langle x, y\rangle | y = 5x - 1, \quad x, y \in R\}$, то

$$f^{-1} = \left\{\langle x, y\rangle \middle| y = \frac{1}{5}(x+1), \ x, y \in R\right\}.$$

Відповіді на питання, чи є представлене відношення функцією і чи є функція взаємнооднозначною, можна легко одержати за допомогою графічної ілюстрації.

Відповідно до визначення функції, ніякі два різних елементи відношення не можуть мати однакових перших координат. Отже, промінь, спрямований паралельно осі Oy, повинен перетинати графік відношення не більше одного разу. Тому що взаємнооднозначні функції переводять різні елементи в різні, то промінь, спрямований паралельно осі Ox, повинен перетинати графік відношення теж не більше одного разу.

Приклад 2.7. З'ясувати, чи є дані відношення функціями? Якщо так, то чи будуть вони взаємнооднозначними? У випадку позитивної відповіді, знайти обернені функції:

а) $f = \{\langle x, y\rangle | y^2 = -x, \quad x, y \in R\}$;

б) $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad x \in R, \, y \in R^+\right\}$;

в) $f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\}$.

Розв'язання:

а) відношення не є функцією, тому що існує два різних елементи, що мають однакові перші координати (див. рис. 2.5, а);

б) відношення є функцією, тому що не існує елементів, що мають однакові перші координати. Дана функція не є взаємнооднозначною, тому що існують елементи, що мають однакові другі координати (див. рис. 2.5, б);

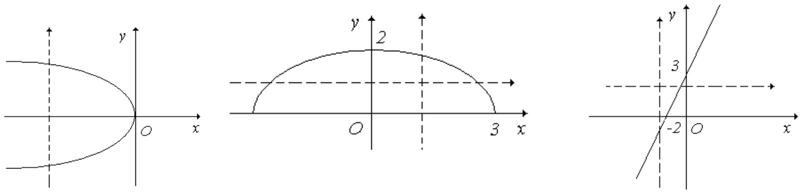
в) відношення є функцією. Дана функція є взаємнооднозначною, тому що переводить різні елементи в різні (див. рис. 2.5, в). Знайдемо функцію, обернену до даної:

$$f = \{\langle x, y\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 3x - 2y + 6 = 0, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \{\langle x, y\rangle | 3y - 2x + 6 = 0, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \left\{\langle y, x\rangle \middle| y = \frac{2}{3}x - 2; \quad x, y \in R\right\}.$$



(а) (б) (в)

Рис. 2.5.

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

3.1. Основні визначення

<u>Визначення 3.1.</u> *Висловлення* – це розповідне речення, про яке можна сказати, що воно істинно або хибно. Істинність або хибність, приписувані висловленню, називаються його *істинностним значенням*.

Наприклад, речення “*Сонце – це зірка*”, “*Балаклея – обласний центр України*” є висловленнями, причому перше – істинно, а друге – хибно. А речення “*котра година?*”, “*вивчите вірш*” не є висловленнями.

У математичних міркуваннях і повсякденній мові часто зустрічаються речення, утворені видозміною деякого речення за допомогою слова *не*, або складені із простих речень за допомогою сполучників: *і, або, якщо … то, тоді і тільки тоді, коли*. Які називаються *сентенційними сполучниками*. На відміну від повсякденної мови, у математичній логіці зміст таких висловлень може бути визначений однозначно.

<u>Визначення 3.2.</u> Висловлення, що не містить сполучників, називається *простим*; висловлення, що містить сполучники, називається *складним*.

Будемо позначати висловлення буквами латинського алфавіту A, B, C, P, Q, R…

Візьмемо наступні прості висловлення:

$A =$“*я встаю рано*”;

$B =$“*я йду на роботу*”.

За допомогою п'яти сентенційних сполучників можна утворити наступні складні висловлення:

- *заперечення* – це речення, видозмінене за допомогою слова *не*; позначається як $\overline{A}$, $\sim A$. Наприклад,

$\overline{A} =$“*я не підіймаюся рано*”;

- *кон’юнкція* – це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *і*; позначається як $A \wedge B$. Наприклад,

$A \wedge B =$ "*я підіймаюсь рано і йду на роботу*";

- *диз'юнкція* - це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слова *або*; позначається як $A \vee B$. Наприклад,

$A \vee \overline{B} =$ "*я підіймаюсь рано або не йду на роботу*";

- *імплікація* - це речення, яке утворено з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *якщо … то*; позначається як $A \to B$. Наприклад,

$A \to B =$ "*якщо я підіймаюсь рано, то йду на роботу*";

- *еквівалентність* - це речення, утворене з'єднанням двох простих речень за допомогою слів *тоді і тільки тоді, коли*; позначається як $A \leftrightarrow B$. Наприклад,

$A \leftrightarrow B =$ "*я підіймаюсь рано тоді і тільки тоді, коли йду на роботу*".

<u>Визначення 3.3.</u> Символи $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ називаються *бінарними* з'єднаннями, тому що вони з'єднують два висловлення, а символ ~ - *унарним* з'єднанням, тому що застосовується тільки до одного висловлення.

Є ще одне бінарне з'єднання – що *виключає або* (*нерівнозначність, додавання за модулем 2*). Позначається як $P \oplus Q$, читається як "або P або Q". Висловлення $P \oplus Q$ істинно, коли істинностні значення P і Q не збігаються, і хибно – у протилежному випадку.

<u>Приклад 3.1.</u> Представити логічними формулами наступні висловлення:

1) "Сьогодні не світить сонце";

2) "Я піду гуляти або залишуся удома";

3) “Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду”;

4) “Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії”;

5) “Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і поваги”;

6) “На вулиці ясно або похмуро”;

7) “Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу”.

Розв’язання:

1) Висловлення “Сьогодні не світить сонце” утворено запереченням висловленню “Сьогодні світить сонце”. Останнє позначимо через P, тоді початкове висловлення є складним представимо логічною формулою: $\overline{P}$.

2) Складне висловлення “Я піду гуляти або залишуся удома” утворено із двох простих, з'єднаних сполучником “*або*”:

P - “Я піду гуляти”;

Q - “Я залишуся удома”. Отже, маємо логічну формулу $P \vee Q$.

3) Складне висловлення “Спортсмен здобув перемогу і одержав заслужену нагороду” утворено із двох простих, з'єднаних сполучником “і”:

P - “Спортсмен здобув перемогу”;

Q - “Спортсмен одержав заслужену нагороду”. Отже, маємо логічну формулу $P \wedge Q$.

4) Складне висловлення “Якщо цех перевиконає план, то робітники одержать премії”, утворено із двох простих, з'єднаних логічним сполучником “*якщо … то*”:

P - “Цех перевиконає план”;

Q - “Робітники одержать премії”. Отже, маємо логічну формулу $P \to Q$.

5) Складне висловлення “Родину варто створювати тоді і тільки тоді, коли між молодими людьми є почуття любові і поваги” утворено із трьох простих, які з’єднані логічним сполучником «тоді і тільки тоді» і сполучником «і»:

P - “Родину варто створювати”;

Q - “Між молодими людьми є почуття любові”;

R - “Між молодими людьми є почуття поваги”. Отже, маємо логічну формулу $P \to (Q \wedge R)$.

6) Складене висловлення “На вулиці ясно або похмуро” утворено із двох простих:

P - “На вулиці ясно”;

Q - “На вулиці похмуро”, з'єднаних сполучником “*або*”, очевидно в розділовому змісті, тобто “*що виключає або*” - $\oplus$, тому що одночасно на вулиці не може бути і ясно, і похмуро. Отже, маємо логічну формулу: $P \oplus Q$.

7) Складне висловлення “Якщо парубок зневажає фізичними вправами або годинами сидить за комп'ютером, то це спричиняє погіршення його самопочуття і погану поставу” розіб'ємо на прості:

P - “Парубок зневажає фізичними вправами ”;

Q - “Парубок годинами сидить за комп'ютером”;

R - “Виникає погіршення самопочуття”;

S - “Виникає погана постава”.

Логічна формула, що описує дане висловлення, буде мати вигляд:

$$(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S).$$

Прості висловлення можуть бути істинними або хибними незалежно друг від друга, але вони визначають значення складного висловлення.

Таблиці істинності (табл. 2.1) для розглянутих вище логічних формул дозволяють легко визначити значення складного висловлення.

Таблиця 2.1.

Заперечення	
P	$\overline{P}$
0	1
1	0

		Диз'юнкція	Кон'юкція	Імплікація	Еквіваленція
P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Висловлення $\overline{P}$ істинно, коли висловлення P - хибно, і хибно – у протилежному випадку. Наприклад, якщо P - “сьогодні холодно”, то $\overline{P}$ - “сьогодні не холодно”.

Висловлення $P \wedge Q$ істинно, коли обидва висловлення істинні, і хибно – у всіх інших випадках. Прикладом кон’юнкції може бути відповідь на питання: “При яких умовах учень, що закінчує школу, може бути студентом?”. Якщо прийняти за P - “одержати атестат зрілості”, а за Q - “одержати сертифікат про незалежне тестування”, то учень буде студентом, коли одержить атестат зрілості і одержить сертифікат про незалежне тестування $(P=1,\ Q=1,\ P \wedge Q=1)$

Висловлення $P \vee Q$ хибно у випадку, коли обидва з простих висловлень хибні, і істинно - у всіх інших випадках. Як приклад розглянемо наступні висловлення: P - “на вулиці йде дощ”, Q - “хтось забув вимкнути душ”. Тоді $P \vee Q$ - “я чую шум води”. Це можливо, якщо на вулиці йде дощ, або якщо хтось забув вимкнути душ, або при виконанні двох цих умов.

Висловлення $P \rightarrow Q$ хибно, якщо P - істинно, а Q - хибно; і істинно у всіх інших випадках. Висловлення “якщо … то” носити пояснюючий характер. Пояснюючий характер імплікації пов'язаний із причинно-наслідковим відношенням, при якому P виступає в ролі заподій (посилки імплікації), а Q - наслідку (висновку). Якщо P - “на вулиці йде дощ”, а Q - “над моєю головою розкрита парасолька”, тоді $P \rightarrow Q$ -“я залишуся сухим” буде помилковим тільки в тому випадку, якщо на вулиці йде дощ, а парасолька не розкрита $(P=1,\ Q=0,\ P \rightarrow Q=0)$.

Висловлення $P \leftrightarrow Q$ істинно, коли значення P і Q збігаються, і хибно – у протилежному випадку. Тому що еквівалентність виражається через кон’юнкцію двох імплікацій $P \leftrightarrow Q=(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, то це відношення виникає при одночасному виконанні двох умов: “із P прямує Q” і “із Q прямує P”.

Наприклад, привласнимо висловленням P і Q значення 1, якщо P і Q означають “дочка”, і 0, якщо P і Q означають “син”. Тоді складне висловлення $P \leftrightarrow Q$ - “у родині одностатеві діти” істинно тоді і тільки тоді, коли або $P = Q = 1$, або $P = Q = 0$.

При записі складних висловлень у символічній формі часто виникає необхідність у використанні великої кількості дужок. Щоб усунути цю незручність вводять деякі угоди. Умовимося, що $\leftrightarrow$ є найсильніше сполучення (тобто вона має найбільшу область дії), а за нею йде $\rightarrow$. Далі – рівні по силі $\vee$ і $\wedge$, а потім ~ - найслабше сполучення. Необхідно пам'ятати, що спочатку виконуються більш слабкі сполучення, а потім - більш сильні.

Якщо істинностні значення простих компонентів відомі, то істинностне значення складного висловлення може бути визначене з використанням таблиць істинності.

<u>Приклад 3.2.</u> Визначити істинностне значення висловлення $A \vee B \rightarrow C \leftrightarrow A \wedge \sim B \rightarrow C$, якщо A і B - істинні $(A = 1,\ B = 1)$, а C - хибно $(C = 0)$.

Розв’язання: Визначення істинностного значення висловлення можна зробити швидко, якщо написати під кожним простим висловленням його істинностне значення, а істинностне значення кожного складного висловлення – під відповідним сполученням. Для зручності читання послідовні кроки можуть бути записані один під одним:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
A & \vee & B & \rightarrow & C & \leftrightarrow & A & \wedge & \sim & B & \rightarrow & C \\
1 & & 1 & & 0 & & 1 & & & 1 & & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & & & \\
 & 1 & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Звідси можемо зробити висновок: дане висловлення хибно.

Складне висловлення може приймати як істинне, так і хибне значення залежно від значень, приписуваним простим компонентам. Для того щоб однозначно вказати ті ситуації, коли складне висловлення є істинним, необхідно врахувати всі можливі ситуації. Із цією метою ми будемо будувати таблиці істинності складних висловлень, використовуючи таблиці істинності простих компонентів. Приведемо два еквівалентних способи побудови таблиці істинності складного висловлення. Перший полягає в тому, що складне висловлення ми розбиваємо на прості, і встановлюємо істинне значення кожного сполучення. А при другому способі ми записуємо істинностні значення під кожним сполученням. Проілюструємо обидва підходи на прикладі.

<u>Приклад 3.3.</u> Побудувати таблицю істинності висловлення $(\sim A \to B) \wedge C$.

Розв'язання: Побудуємо таблицю істинності двома способами:

A	B	C	$\sim A$	$\sim A \to B$	$(\sim A \to B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

A	B	C	$(\sim A \to B) \wedge C$		
1	1	1	0	1	**1**
1	1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**0**
0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	1	**0**
0	0	1	1	1	**0**
0	0	0	1	1	**0**

3.2. Істинностна функція

Обчислення висловлень призначене для аналізу логічних зв'язків між реченнями, які залежать лише від побудови нових речень з вихідних за допомогою вже відомих нам сентенційних сполучників. Для такого аналізу необхідна наявність вихідної непустої множини простих речень і виконання наступних допущень:

а) кожне просте речення є висловленням, тобто кожному простому реченню можна поставити у відповідність його істинностне значення;

б) кожне з висловлень, що аналізуємо, складається із простих висловлень багаторазовим використанням сентенційних сполучників і приймає істинностне значення, яке випливає з наведених раніше таблиць істинності для сентенційних сполучень, відповідно до істинностних значень простих речень-висловлень.

Отже, нехай нам дана непуста множина простих висловлень A, B ,... Розширимо цю множину, приєднавши до неї всі ті висловлення, які можна утворити із простих, багаторазово і усілякими способами використовуючи різні сентенційні сполучники. Тобто, елементами розширеної множини будуть: $\sim A$; $A \vee B$; $B \to (\sim B \wedge A)$; $A \leftrightarrow (B \wedge A) \vee \sim A$;... Елементи цієї множини називають *формулами*, причому елементи вихідної множини – *простими формулами* (або *компонентами*), а інші – *складними формулами*.

Кожній простій формулі ставиться у відповідність один елемент із множини $\{1,0\}$. Істинностне значення складної формули визначається у відповідності із таблицями істинності для заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації та еквівалентності.

Якщо простими компонентами формули A служать $p_1, p_2, \dots, p_n$, то для визначення істинностного значення формули A по істинностним значенням простих компонентів $p_1, p_2, \dots, p_n$, необхідно побудувати таблицю істинності, що складає з 2^n рядків.

Визначення 3.4. Істинностна функція – це функцій від n аргументів, кожний з яких може приймати значення 1 або 0, і сама функція може приймати значення 1 або 0.

Позначати істинностні функції будемо як $f(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $g(q_1, q_2, \dots, q_n)$ і т.д.

Під істинностними функціями будемо розуміти елементи множини ϑ, що володіє наступними властивостями:

а) кожна з функцій $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ - елемент множини ϑ;

б) якщо функція f - елемент множини ϑ, то елементом множини ϑ буде і функція, отримана підстановкою f в якості змінної в кожну з функцій, перерахованих вище.

Як приклади можна привести наступні істинностні функції: $(p \to q) \vee \sim q$, $p \leftrightarrow p \wedge (q \to \sim p)$, …

3.3. Еквівалентні висловлення. Тавтології

Особливий інтерес у обчисленні висловлень представляють складні висловлення, що мають різну побудову, але приймають істинне значення в тих же самих випадках, тобто вони мають однакові таблиці істинності. Такі висловлення називають ***логічно еквівалентними***. Наприклад, нехай P - "на вулиці холодно", Q - "я легко одягнений". Розглянемо висловлення - "невірно, що на вулиці холодно і я легко одягнений" - $\sim (P \wedge Q)$ і висловлення - "на вулиці не холодно або я не легко одягнений" - $\sim P \vee \sim Q$. Побудуємо таблиці істинності:

P	Q	$\sim (P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	1	1

У всіх чотирьох рядках істинностні значення складних формул збігаються, отже, два розглянутих висловлення – логічно еквівалентні.

Логічно еквівалентні висловлення A і B позначають як A ***eq*** B.

<u>Визначення 3.5.</u> Висловлення, істинне при всіх розподілах простих компонентів, називається ***логічно істинним, загальнозначущим*** або ***тавтологією.*** Висловлення, хибне при всіх розподілах простих компонентів, називається ***логічно хибним*** або ***протиріччям***.

Добре нам відомим прикладом тавтології є аксіоми і теореми в математиці, тому що вони істинні завжди.

Маючи логічно істинне висловлення – тавтологію, легко побудувати логічно хибне висловлення – протиріччя. Для цього досить взяти заперечення тавтології. Якщо A - тавтологія, то $\sim A$ - протиріччя.

Для того щоб вирішити питання про те, дана формула A є тавтологією чи ні, необхідно розглянути її таблицю істинності. Формула A є тавтологією тоді і тільки тоді, коли її істинностне значення є 1 при кожному із 2^n приписаних простим компонентам, що входять у формулу A, значенням 1 або 0.

<u>Приклад 3.4.</u> Чи є висловлення $A \wedge (A \to B) \to B$ тавтологією?

Розв'язання: Розглянемо таблицю істинності даного висловлення:

A	B	$A \wedge (A \to B) \to B$		
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	0	1	**1**
0	0	0	1	**1**

Як прямує з таблиці істинності, при кожному з $2^2 = 4$ розподілі значень простих компонентів, формула, що описує дане висловлення, приймає значення 1. Отже, дане висловлення є тавтологією.

Незважаючи на те, що метод установлення загальної значимості формул за допомогою дослідження їхніх таблиць істинності громіздкий і стомлюючий, він завжди дає відповідь на поставлене питання.

Нижче представимо список деяких тавтологій. Їх запам'ятовувати немає необхідності, цей список буде використовуватися нами як довідковий матеріал.

Тавтологічні імплікації:

1. $A \wedge (A \to B) \to B$;

2. $\sim B \wedge (A \to B) \to \sim A$;

3. $\sim A \wedge (A \vee B) \to B$;

4. $A \to (B \to A \wedge B)$;

5. $A \wedge B \to A$;

6. $A \to A \vee B$;

7. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$;

8. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$;

9. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$;

10. $(A \to B \wedge \sim B) \to \sim A$;

11. $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$;

12. $(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$;

13. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

14. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$.

Тавтологічні еквіваленції:

15. $A \leftrightarrow A$;

16. $\sim\sim A \leftrightarrow A$;

17. $(A \to B) \wedge (C \to B) \leftrightarrow (A \vee C \to B)$;

18. $(A \to B) \wedge (A \to C) \leftrightarrow (A \to B \wedge C)$;

19. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$;

20. $(A \to B) \leftrightarrow (\sim B \to \sim A)$;

21. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$;

21a. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$;

22. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;

22a. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;

23. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

23a. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

24. $A \vee A \leftrightarrow A$;

24a. $A \wedge A \leftrightarrow A$;

25. $\sim (A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$;

25a. $\sim (A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$;

Тавтології для виключення зв'язувань:

26. $A \to B \leftrightarrow \sim A \vee B$;

27. $A \to B \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$;

28. $A \vee B \leftrightarrow \sim A \to B$;

29. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.

30. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (A \to \sim B)$;

31. $A \wedge B \leftrightarrow \sim (\sim A \vee \sim B)$;

32. $A \vee B \leftrightarrow \sim (\sim A \wedge \sim B)$.

Замість того, щоб для обчислення істинностного значення формули, користуватися таблицями істинності, можна вдатися до арифметичних процедур. Для цього приймають деякі угоди, а саме:

1. Формула інтерпретується як істинностна функція, де кожен простий компонент розглядається як змінна, котрої можна приписати значення 1 або 0.

2. Суми і добутки доданків і співмножників 1 і 0, що входять у формули, обчислюються як у звичайній арифметиці, за винятком 1+1=0.

Легко перевірити (за допомогою таблиць істинності), що *основні істинностні функції* задаються наступними формулами:

$\sim P = 1 + P$;

$P \wedge Q = P + Q + PQ$;

$P \vee Q = PQ$;

$P \to Q = (1 + P)Q$;

$P \leftrightarrow Q = P + Q$.

У цих термінах тавтологіями є ті істинностні функції, які тотожно рівні нулю.

<u>Приклад 3.5.</u> Довести, що формула $A \to (B \to A \wedge B)$ є тавтологією, не використовуючи таблицю істинності.

Розв'язання: Виконаємо ряд перетворень:

$A \wedge B = A + B + AB$;

$B \to A \wedge B = (1+B)(A+B+AB) = (1+B)A + (1+B)B + (1+B)AB$

тому що

$(1+B)B = 0$, то другий і третій доданки дорівнюють нулю, отже, $B \to A \wedge B = (1+B)A$.

Далі, $A \to (B \to A \wedge B) = (1+A)(1+B)A = (1+A)A(1+B) = 0$, тому що $(1+A)A = 0$. Отже, дана формула є тавтологією.

Помітимо, що в даній алгебрі $2A$ і $(1+A)A$ тотожно дорівнюють нулю, що істотно полегшує спрощення довгих виразів.

4. АЛГЕБРА ЛОГІКИ

4.1. Логічні функції. Основні визначення

Алгебра логіки є самостійним розділом математичної логіки. Предметом її вивчення є побудова складних логічних висловлень, що представляють логічними формулами, і методів установлення їхньої істинності.

Нехай $B = \{0,1\}$ - бінарна множина, елементами якого є 0 і 1, що не мають арифметичного змісту, логічна інтерпретація яких є “істинно”, “хибно” або “так”, “ні”.

<u>Визначення 4.1.</u> Алгебра, утворена множиною B разом з усіма можливими операціями на ньому, називається ***алгеброю логіки***. При цьому множина B називається ***основною множиною*** або ***носієм алгебри***.

<u>Визначення 4.2.</u> Функцією алгебри логіки (або ***логічною функцією, булевою функцією***) f від n змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається n-вимірна логічна операція на множині B. Тобто, $f: B^n \to B$. Логічна функція - функція від логічних змінних також може приймати тільки два логічних значення 0 або 1. Множину всіх логічних функцій будемо позначати як P_2. Множину всіх логічних функцій n змінних - $P_2(n)$.

<u>Визначення 4.3.</u> Логічною формулою називається формула, що складається з букв, знаків логічних операцій і дужок. При цьому букви позначають логічні змінні. Кожна формула задає логічну функцію.

Будь-яку логічну функцію можна задати або логічною формулою, або за допомогою таблиці істинності.

При визначенні логічної функції за допомогою таблиці істинності, у таблиці ліворуч виписуються всі можливі набори значення логічних змінних, а праворуч – значення функції, що відповідають цим наборам. Набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, називається *одиничним набором функції*, набір значень змінних, при якому $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, називається *нульовим набором функції*.

Число всіх можливих наборів, що розрізняються, логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних дорівнює 2^n. Ця множина з 2^n наборів є *областю визначення* логічної функції. Число всіх різних функцій n змінних дорівнює числу можливих розміщень нулів і одиниць у стовпці таблиці з 2^n рядками, тобто 2^{2^n}.

<u>Визначення 4.4.</u> Змінна x_i логічної функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ називається ***несуттєвою*** (або ***фіктивною***), якщо $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ при будь-яких значеннях інших змінних, тобто зміна x_i в будь-якому наборі значень $x_1, ..., x_n$ не міняє значення функції.

Нехай змінна x_i є фіктивною для функції $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$. Вилучимо з таблиці істинності стовпець аргументу x_i. Тобто, буде отримана нова таблиця для функції $n-1$ змінної, котру позначимо як $g(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Отже, функція g отримана з функції f шляхом вилучення фіктивної змінної.

<u>Визначення 4.5.</u> Дві функції називають *рівними*, якщо одну можна одержати з іншої шляхом вилучення або додавання фіктивних змінних.

Логічних функцій однієї змінної $2^{2^1} = 4$. Множина всіх логічних функцій однієї змінної представлене в табл. 4.1.

Таблиця 4.1.

x	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Тут $\varphi_0(x)=0$, $\varphi_3(x)=1$ константи 0 і 1 відповідно. Значення цих функцій не залежить від змінної x, отже, змінна x тут є фіктивною. Функції $\varphi_1(x)=x$ - повторення змінної, $\varphi_2(x)=\bar{x}$ - заперечення змінної.

Логічних функцій двох змінних $2^{2^2}=16$. Множина всіх логічних функцій двох змінних представлене в табл. 4.2.

Таблиця 4.2.

x_1	x_2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Дамо визначення функцій, наведених у табл. 4.2:

$\phi_0 = 0$ - константа 0;

$\phi_1 = x_1 \wedge x_2$ - кон’юнкція;

$\phi_2 = \overline{x_1 \rightarrow x_2}$ - заперечення імплікації;

$\phi_3 = x_1$ - повторення x_1;

$\phi_4 = \overline{x_1 \leftarrow x_2}$ - заперечення коімплікації;

$\phi_5 = x_2$ - повторення x_2;

$\phi_6 = x_1 \oplus x_2$ - додавання за модулем 2;

$\phi_7 = x_1 \vee x_2$ - диз'юнкція;

$\phi_8 = x_1 \downarrow x_2$ - стрілка Пірса;

$\phi_9 = x_1 \leftrightarrow x_2$ - еквівалентність;

$\phi_{10} = \bar{x}_2$ - заперечення x_2;

$\phi_{11} = x_1 \leftarrow x_2$ - коімпликація;

$\phi_{12} = \bar{x}_1$ - заперечення x_1;

$\phi_{13} = x_1 \rightarrow x_2$ - імплікація;

$\phi_{14} = x_1 | x_2$ - штрих Шеффера;

$\phi_{15} = 1$ - константа 1.

Як можна помітити, з 16 функцій двох змінних, шість мають фіктивні змінні:- у функціях ϕ_0 і ϕ_{15} фіктивні змінні x_1 і x_2;

- у функціях ϕ_5 і ϕ_{10} фіктивна змінна x_1;

- у функціях ϕ_3 і ϕ_{12} фіктивна змінна x_2.

<u>Визначення 4.6.</u> ***Суперпозицією функцій*** $f_1, \ldots, f_n$ називається функція f, яка отримана за допомогою підстановок цих функцій друг у друга і перейменування змінних.

Наприклад, $f(x_1, x_2, x_3) = f_4(f_1(x_2, f_2(x_3, x_1)), f_3(x_2, x_1))$ являє собою суперпозицію функцій.

Приклад 4.1.

Нехай $f(x_1,x_2,x_3)= f_4(f_1(x_2, f_2(x_3,x_1)), f_3(x_2,x_1))$ і f_1 означає кон'юнкцію, f_2 - диз'юнкцію, f_3 - імплікацію, f_4 - додавання за модулем 2. Представити функцію формулою і обчислити значення функції на наборі $(0,0,1)$

Розв'язання: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \to x_1).$$

Обчислимо значення f на наборі $(0,0,1)$, для чого підставимо в отриману формулу значення змінних:

$$(x_2 \wedge (x_3 \vee x_2)) \oplus (x_2 \to x_1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ & & 1 & & & 1 & \\ & 0 & & & & & \\ & & & & 1 & & \end{array}$$

Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

Приклад 4.2. Обчислити значення функції $f = \phi_6(\phi_1(x_1,x_2),\phi_{11}(x_3,x_2))$ на наборі $(1,0,1)$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2: $\phi_1(1,0)=0$, $\phi_{11}(1,0)=1$, а $\phi_6(0,1)=1$. Тобто, при даному наборі змінних функція істинна.

Визначення 4.7. ***Еквівалентними,*** або ***рівносильними,*** називаються формули, що подають ту саму функцію. Еквівалентність формул в алгебрі логіці позначається символом "=".

Для того, щоб встановити еквівалентність формул, потрібно скласти їхні таблиці істинності, і порівняти їх по кожному набору змінних.

<u>Приклад 4.3.</u> Довести еквівалентність формул

$$x_1 \oplus x_2 = \left(x_1 \wedge \bar{x}_2\right) \vee \left(\bar{x}_1 \wedge x_2\right).$$

Розв'язання: Складемо таблиці істинності наведених формул.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$	$\left(x_1 \wedge \bar{x}_2\right) \vee \left(\bar{x}_1 \wedge x_2\right)$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Як бачимо, таблиці істинності формул $x_1 \oplus x_2$ і $\left(x_1 \wedge \bar{x}_2\right) \vee \left(\bar{x}_1 \wedge x_2\right)$ збігаються. Звідси робимо висновок, що формули еквівалентні.

Використовуючи таблиці істинності можна довести наступні логічні еквівалентності (закони логіки Буля):

1. ***Закони ідемпотентності:*** $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$.

2. ***Закон подвійного заперечення:*** $\bar{\bar{x}} = x$.

3. ***Властивості комутативності:*** $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \vee x$.

4. ***Властивості асоціативності:***
$x \wedge \left(y \wedge z\right) = \left(x \wedge y\right) \wedge z = x \wedge y \wedge z$;
$x \vee \left(y \vee z\right) = \left(x \vee y\right) \vee z = x \vee y \vee z$.

5. ***Властивості дистрибутивності:***

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

6. ***Закони де Моргана:*** $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$; $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

7. ***Властивості констант:*** $x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 1 = x$; $x \vee 0 = x$; $\bar{0} = 1$; $\bar{1} = 0$.

8. ***Закон протиріччя:*** $x \wedge \bar{x} = 0$.

9. ***Закон виключення третього:*** $x \vee \bar{x} = 1$.

10. ***Закон поглинання:*** $(x \wedge y) \vee x = x$.

11. ***Закон склеювання:*** $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$.

12. ***Закон узагальненого склеювання:*** $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z)$.

13. ***Розкриття імплікації і еквівалентності:*** $x \to y = \bar{x} \vee y$; $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Тотожними перетвореннями зручно користуватися у задачах по спрощенню логічних формул, тому що формули найчастіше являють собою суперпозицію інших формул і функцій. Тобто, при виконанні тотожних перетворень будь-які формули можна заміняти еквівалентними їм.

4.2. Булева алгебра. Довершені нормальні форми

Як ми вже показали, одна і та ж сама логічна функція може бути представлена формулами, що включають різні набори логічних операцій. Виявляється, існують такі набори логічних функцій (операцій над логічними змінними), за допомогою яких можна визначити будь-які інші логічні функції.

Визначення 4.8. Система функцій Σ називається *функціонально повною* (або *базисом*), якщо будь-яка булева функція може бути представлена у вигляді формули, що складається тільки з функцій цієї системи.

Існує ряд функціонально повних систем логічних функцій, наприклад, $\{\wedge,\vee,\sim\}$, $\{\wedge,\sim\}$, $\{\vee,\sim\}$, $\{\ |\ \}$, $\{\downarrow\}$, $\{\wedge,\oplus,1\}$, $\{\rightarrow,\sim\}$, $\{\vee,\sim,\oplus\}$, $\{\wedge,\sim,\oplus\}$ і ін. На деяких з них ми зупинимося докладніше нижче.

Найбільш вивченим і використовуваним є базис $\{\wedge,\vee,\sim\}$. Формули, що містять тільки знаки функцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення називаються *булевими*.

<u>Визначення 4.9.</u> Алгебра $(P_2,\wedge,\vee,\sim)$, основною множиною якої є множина всіх логічних функцій P_2, а операціями - кон'юнкція, диз'юнкція і заперечення, називається *булевою алгеброю логічних функцій*. Операції і формули булевої алгебри називаються *булевими*.

Система операцій булевої алгебри $\{\wedge,\vee,\sim\}$ функціонально повна. Отже, перехід від табличного завдання будь-якої логічної функції до булевої формули завжди можливий.

<u>Теорема 4.1.</u> Усяка логічна функція може бути представлена булевою формулою, тобто як суперпозиція кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення.

<u>Наслідок 1.</u> Усяка логічна функція може бути представлена формулою:

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\vee\ \ x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}\,;\ f\left(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\right)=1,$$

яку називають *досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*.

Тут диз'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$, на яких функція $f=1$. ДДНФ функції f містить стільки диз'юнкцій, скільки одиниць у таблиці f; кожному одиничному набору $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ відповідає кон'юнкція всіх змінних, у яких x_i записуємо із запереченням, якщо $\sigma_i = 0$ і без заперечення, якщо $\sigma_i = 1$.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f і її ДДНФ. Отже, ДДНФ для всякої логічної функції єдина.

Приклад 4.4. Записати ДДНФ функції, яка задана таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання:

Виділимо набори змінних, якім відповідають одиничні значення функції. ДДНФ даної функції має вигляд: $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$.

Зауваження 1. Єдина функція, що не має ДДНФ - це константа 0, тому що не має жодного одиничного набору в таблиці істинності.

Наслідок 2. Усяка логічна функція може бути представлена формулою

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\wedge\left(\bigvee_{i=1}^{n}\overline{x_i^{\sigma_i}}\right);\quad f\left(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n\right)=0,$$

яку називають *довершеною кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ).*

Тут кон'юнкція береться по всіх наборах $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$, на яких функція $f=0$. ДКНФ функції f містить стільки кон'юнкцій, скільки нулів у таблиці f; кожному нульовому набору $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ відповідає диз'юнкція всіх змінних, у яких x_i записуємо із запереченням, якщо $\sigma_i=1$ і без заперечення, якщо $\sigma_i=0$.

Існує взаємно однозначна відповідність між таблицею функції f і її ДКНФ, отже, ДКНФ для всякої логічної функції єдина.

<u>Приклад 4.5.</u>

Записати ДКНФ функції, яка задана таблицею.

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
f	0	1	1	0	0	1	0	0

Розв'язання: Виділимо набори змінних, яким відповідають нульові значення функції. ДКНФ даної функції має вигляд: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot$ $\cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

<u>Зауваження 2.</u> Єдина функція, що не має ДКНФ - це константа 1, тому що не має жодного нульового набору в таблиці істинності.

<u>Зауваження 3.</u> Із двох формул – ДДНФ і ЗДНФ – за звичаєм вибирають ту, яка коротше. Тобто, якщо таблиця функції f містить менше одиничних наборів, то – ДДНФ; якщо містить менше нульових наборів – ДКНФ.

<u>Приклад 4.6.</u> Логічну функцію трьох змінних

$$f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2)\bar{x}_3) \to (x_1 \leftrightarrow x_3)$$

представити булевой формулою: у вигляді ДДНФ та у вигляді ДКНФ.

Розв'язання: Побудуємо таблицю істинності формули

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_1 \vee x_2$	$(x_1 \vee x_2)\bar{x}_3$	$x_1 \leftrightarrow x_3$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1

ДДНФ функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3.$$

ДКНФ функції має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3).$$

Приклад 4.7. За допомогою таблиці 4.2 визначити ДКНФ функції $x_1 \mid x_2$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2 і запишемо ДКНФ штриха Шеффера $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Приклад 4.8. За допомогою таблиці 4.2 визначити ДДНФ функції $x_1 \downarrow x_2$.

Розв'язання: Скористаємося табл. 4.2 і запишемо ДДНФ стрілки Пірса $f(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2$.

5. ГРАФИ

Графічне подання розв'язання деяких прикладних задач нам добре відомо. До графічних подань у широкому сенсі можна віднести малюнки, креслення, графіки, діаграми, блок-схеми і т.п. З їхньою допомогою можна наочно проілюструвати залежності процесів і явищ, логічні, структурні, причинно-наслідкові і інші взаємозв'язки. Однак теорія графів має свою власну проблематику. У дискретній математиці граф є найважливішим математичним поняттям. На основі теорії графів будують моделі різноманітних задач, таких як маршрутизації, розподілу ресурсів, дискретної оптимізації, галузевого планування і керування, аналізу і проектування організаційних структур, аналізу процесу їх функціонування і багато інших.

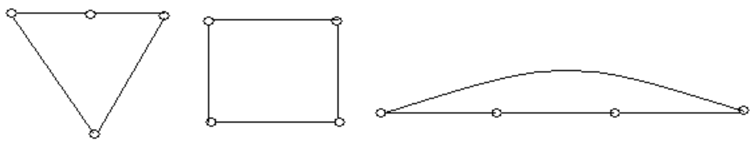
5.1. Основні визначення

Визначення 5.1. *Графом* G називається сукупність двох множин V точок і E ліній, між якими визначене *відношення інцидентності*, причому, кожен елемент $e \in E$ інцидентен рівно двом елементам $v', v'' \in V$. Елементи множини V називаються *вершинами*, а елементи множини E - *ребрами* графа. Вершини і ребра графа називаються його *елементами*, тому найчастіше пишуть $v \in G$ і $e \in G$.

Визначення 5.2. Якщо ребро e з'єднує вершини v', v'', тоді вони є для нього кінцевими точками і називаються *суміжними* вершинами. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони інцидентні до загальної вершини.

Необхідно відзначити, що при зображенні графа не всі деталі малюнка мають значення. Так, наприклад, несуттєвою є довжина і кривизна ребер, взаємне розташування вершин на площині. Принциповим є тільки відношення інцидентності.

Приклад 5.1. Моделі, зображені на рис. 5.1 а, б, в, з погляду теорії графів однакові.

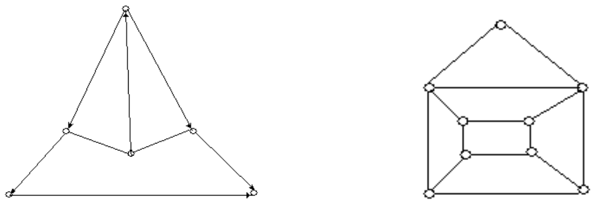


(а) (б) (в)

Рис. 5.1.

У деяких задачах інцидентні ребру вершини нерівноправні, а розглядаються в певному порядку. Тоді кожному ребру можна приписати напрямок від першої інцидентної вершини до другої.

Визначення 5.3. Напрямлені ребра називають *орієнтованими ребрами* або *дугами*, перша по черзі вершина називається *початком* дуги, а друга – її *кінцем*. Граф, що містить напрямлені ребра, називається *орієнтованим* графом або *орграфом* (рис. 5.2, а), а граф, що не містить напрямлених ребер – *неорієнтованим* або *н-графом* (рис. 5.2, б).



(а) (б)

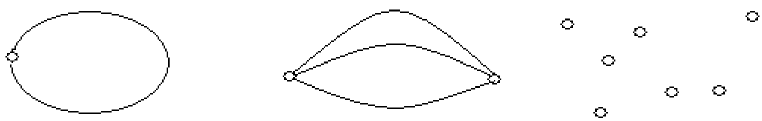
Рис. 5.2.

<u>Визначення 5.4.</u> Ребро, що з'єднує деяку вершину саму із собою, називається *петлею* (рис. 5.3,а).

<u>Визначення 5.5.</u> Ребра, інцидентні до однієї й тієї ж вершини, називаються *кратними* (рис. 5.3,б). Граф, що містить кратні ребра, називається *мультиграфом*, а граф, що містить кратні ребра і петлі – *псевдографом*.

<u>Визначення 5.6.</u> Граф називається *кінцевим*, якщо множина його вершин і ребер звичайна.

Множина ребер графа може бути порожньою (рис. 5.3,в). Такий граф називається *порожній* або *пустий*.



(а) (б) (в)

Рис. 5.3.

Визначення 5.7. Граф без петель і кратних ребер називається *повним*, якщо кожна пара його вершин з'єднана ребром. Повний граф з n вершинами позначається K_n.

Приклад 5.2. На рис. 5.4 зображені повні графи K_2, K_3, K_4, K_5 і K_6 відповідно:

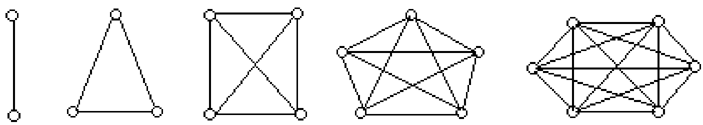


Рис. 5.4.

Визначення 5.8. *Доповненням графа* G називається граф $\overline{G}$, що має ті ж вершини, що і граф G і тільки ті ребра, які необхідно додати до графа G, щоб він став повним.

Приклад 5.3. Доповненням графа G, зображеного на рис. 5.5,а є граф $\overline{G}$, зображений на рис. 5.5,б. Для порівняння, повний граф зображений на рис. 5.5,в.

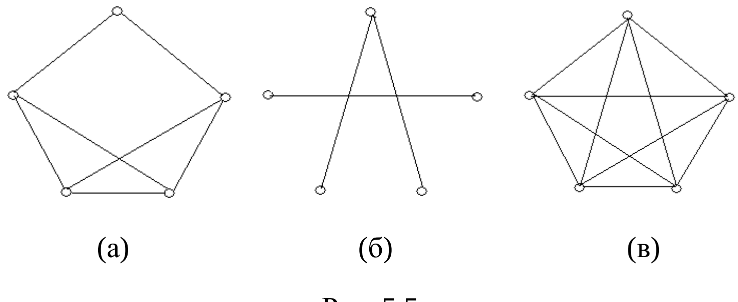


Рис. 5.5.

Визначення 5.9. *Степенем вершини* v $(\deg v)$ називається кількість ребер, інцидентних цієї вершині. Вершина степеня 0 називається *ізольованою*. У графі з петлями петля дає внесок в 2 одиниці у степінь вершини.

<u>Теорема 5.1.</u> Сума степенів вершин графа завжди парна: $\sum_{v \in G} \deg v = 2m$, де m - кількість ребер графа.

Доведення: Тому що кожне ребро графа має два кінці, степінь кожного кінця збільшується на 1 за рахунок одного ребра. Тобто у суму степенів всіх вершин кожне ребро вносить 2 одиниці. Отже, сума ступенів вершин повинна у два рази перевищувати число ребер, тобто бути парною.

<u>Теорема 5.2.</u> У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

Доведення: Доведемо від оберненого. Припустимо, є непарне число вершин непарного степеня. Сума вершин парного степеня - парна. Сума степенів всіх вершин графа є сума вершин непарного і парного степенів. Така сума завжди є число непарне. Тобто сума степенів всіх вершин графа буде непарною. Це суперечить умові теореми 5.1. Прийшли до протиріччя. Отже, кількість вершин непарного степеня в будь-якому графі парна.

Справедливість теорем 5.1 і 5.2 можна проілюструвати на наступному прикладі.

<u>Приклад 5.4.</u> Визначити степені вершин графа, зображеного на рис. 5.6.

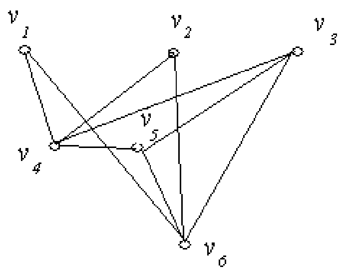


Рис. 5.6.

Розв'язання: $\deg v_1 = 2$; $\deg v_2 = 2$; $\deg v_3 = 3$; $\deg v_4 = 4$; $\deg v_5 = 3$; $\deg v_6 = 4$.

$$\sum_{v \in G} \deg v = 2+2+3+4+3+4 = 18 = 2 \cdot 9 = 2m.$$

У розглянутому графі дев'ять ребер, а вершин непарного степеня дві: v_3; v_5.

<u>Визначення 5.10.</u> Для орієнтованого графа визначаються дві степені вершин: $\deg v'$ - кількість ребер, що виходять із вершини v і $\deg v''$ - кількість ребер, що входять у вершину v. Петля дає внесок по одиниці в обидві степені.

В орграфі суми степенів всіх вершин $\deg v'$ і $\deg v''$ рівні між собою і дорівнюють кількості ребер m цього графа: $\sum_{v \in G} \deg v' = \sum_{v \in G} \deg v'' = m$.

<u>Приклад 5.5.</u> Визначити степені вершин орграфа, зображеного на рис. 5.7.

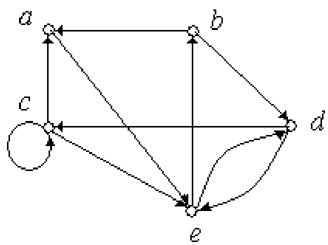


Рис. 5.7.

Розв'язання:

$\deg a' = 1$, $\deg b' = 2$; $\deg c' = 3$; $\deg d' = 2$; $\deg e' = 2$;

$\deg a'' = 2$, $\deg b'' = 1$; $\deg c'' = 2$; $\deg d'' = 2$; $\deg e'' = 3$;

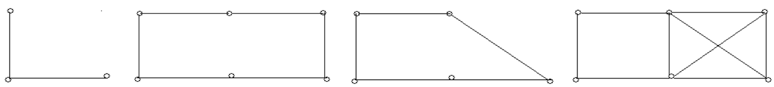
$$\sum_{v \in G} \deg v' = 1 + 2 + 3 + 2 + 2 = 10 =$$

$$= \sum_{v \in G} \deg v'' == 2 + 1 + 2 + 2 + 3 = 10 = m\,.$$

<u>Визначення 5.11.</u> Граф G' називається *підграфом* графа G, якщо кожна вершина і кожне ребро графа G' є відповідно вершиною і ребром графа G.

<u>Визначення 5.12.</u> Граф G' називається *остовом (каркасом)* графа G, якщо містить всі його вершини. За визначенням 5.11 він також є *підграфом* графа G.

<u>Приклад 5.6.</u> На рис. 5.8(а,б,в) зображені підграфи графа, зображеного на рис. 5.8,г. Причому підграф (рис. 5.8,б) є його каркас.



(а) (б) (в) (г)

Рис. 5.8.

Один і той же граф можна зображати по-різному. По-різному можна розташовувати вершини на площині; і ребра можна зображувати не тільки відрізками прямих (різної довжини) але і дугами. Тому порівнюючи графи, будемо мати на увазі наступні визначення.

<u>Визначення 5.13.</u> Графи G_1 і G_2 *рівні*, якщо множини їхніх вершин і ребер, визначених через пари інцидентних їм вершин, збігаються. Наприклад, графи, зображені на рис. 5.1 рівні.

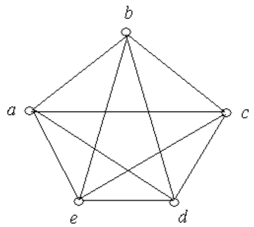
Задати граф – означає описати множини його вершин і ребер, а також відношення інцидентності. Коли граф G - кінцевий, для його опису досить занумерувати вершини і ребра.

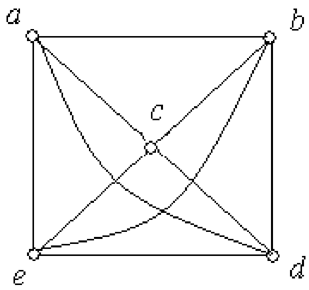
<u>Визначення 5.14.</u> Граф G називається *повністю заданим*, якщо нумерація його вершин і ребер зафіксована. Графи, що відрізняються тільки нумерацією, називаються *ізоморфними*.

Приведемо ще одне визначення ізоморфних графів.

<u>Визначення 5.15.</u> Графи G_1 і G_2 *ізоморфні* якщо їхні вершини можна пронумерувати таким чином, що ребро e_j тоді і тільки тоді з'єднує вершини v_i і v_k у графі G_1, коли ребро e'_j з'єднує вершини v'_i і v'_k у графі G_2.

<u>Приклад 5.7.</u> Графи, зображені на рис. 5.9, (а), (б) - ізоморфні.



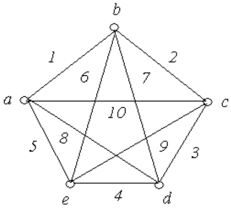


(а)

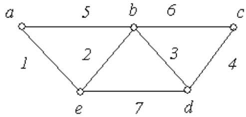
(б)

Рис. 5.9.

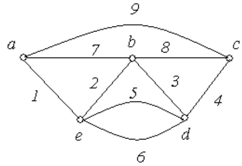
Приклад 5.8. На рис. 5.10 зображені графи G_1-G_{13} з п'ятьма вершинами в кожному. Порівняти графи.



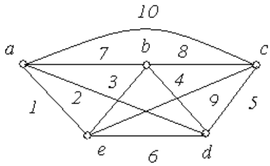
G_1



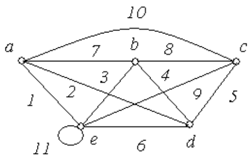
G_2



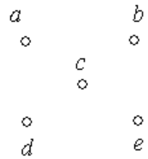
G_3



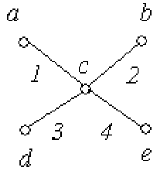
G_4



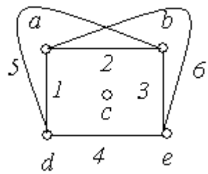
G_5



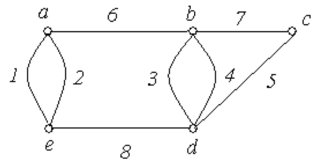
G_6



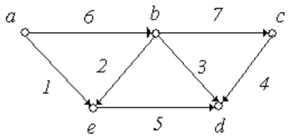
G_7



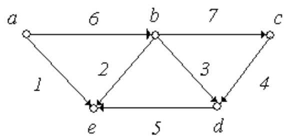
G_8



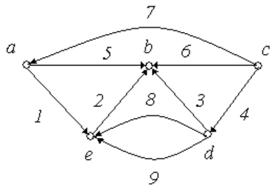
G_9

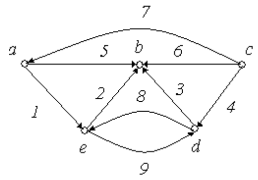


G_{10}



G_{11}





G_{12} G_{13}

Рис. 5.10.

Розв'язання:

Графи G_1-G_9 - неорієнтовані графи, а G_{10}-G_{13} - орієнтовані.

Графи G_1 і G_4 - повні, причому $G_1 = G_4$.

Граф G_5 не є повним, тому що незважаючи на то, що кожна пара вершин з'єднана ребром, є петля.

Графи G_3 і G_9 є мультиграфами, тому що містять кратні ребра.

Граф G_6 - має порожню множину ребер, всі вершини графа є ізольованими.

Графи G_7 і G_8 є доповненням друг до друга.

Графи G_{10} і G_{11} не є рівними, тому що ребра 5 мають різний напрямок.

Граф G_{12}- орієнтований мультиграф, тому що має кратні ребра, у той час як граф G_{13} не є мультиграфом, тому що ребра 8 і 9 по-різному орієнтовані.

5.2. Способи завдання графів

Як було сказано в п. 5.1 для завдання графа необхідно занумерувати вершини і ребра, а також задати відношення інцидентності. Відношення інцидентності будемо описувати трьома способами: *матрицею інцидентності*, *матрицею суміжності*, *списком ребер* графа. Опишемо докладно кожний з перерахованих способів.

<u>*Матриця інцидентності*</u> $\|\varepsilon_{ij}\|$ – це матриця розміром $m \times n$, де вертикально вказуються вершини $i = \overline{1, n}$, а горизонтально – ребра $j = \overline{1, m}$. На перетині i-того і j-того рядків число ε_{ij} дорівнює:

а) у випадку неорієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } e_i \text{ інцидентно вершині } v_i; \\ 0, & \text{якщо ребро } e_i \text{ не інцидентно вершині } v_i; \\ \alpha, & \text{якщо ребро } e_i \text{ – петля } (\alpha \neq 0 \text{ і } \alpha \neq 1) \end{cases}$$

б) у випадку орієнтованого графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{якщо } v_i - \text{початок ребра } e_i\ ; \\ \ \ 1, & \text{якщо } v_i - \text{кінець ребра } e_i\ ; \\ 0, & \text{якщо вони не інцидентні}; \\ \alpha, & \text{якщо ребро } e_i \text{ – петля, а } v_i \text{ – інцидентна їй вершина} \end{cases}$$

<u>*Матриця суміжності*</u> $\|\delta_{ij}\|$ - це квадратна матриця розміром $n \times n$, де вертикально і горизонтально вказуються вершини графа $i = \overline{1, n}$ і $j = \overline{1, n}$. На перетинанні i-того і j-того рядків число δ_{ij} дорівнює:

- числу ребер, що з'єднують ці вершини у випадку неорієнтованого графа;

- числу ребер з початком в i-тій вершині і кінцем в j-тій вершині у випадку орієнтованого графа.

<u>*Список ребер*</u> графа – це таблиця, що складається із трьох рядків. У першому перераховані всі ребра; у другому і третьому – інцидентні їм вершини:

- у випадку неорієнтованого графа порядок вершин у рядку довільний;

- у випадку орієнтованого графа першою записується вершина, де починається ребро (другий рядок); вершина, де закінчується ребро, записується у третій рядок.

Для нумерації вершин і ребер графа використовують різний символьний запис: римські, арабські цифри, латинські букви.

Якщо графи рівні, то їх матриці суміжності і інцидентності, а також список ребер, однакові.

<u>Приклад 5.9.</u> Задати матрицями інцидентності і суміжності, а також списком ребер, неорієнтований граф, зображений на рис. 5.11.

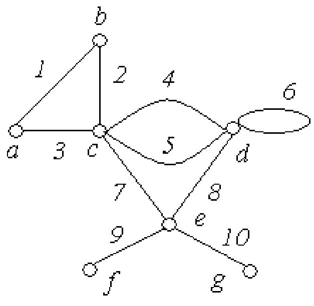


Рис. 5.11.

Розв'язання:

Матриця інцидентності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	1	1	0	2	1	0	0
d	0	0	2	1	1	0	0
e	0	0	1	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

Тут $\alpha = 2$.

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	*a*	*b*	*a*	*c*	*c*	*d*	*c*	*d*	*e*	*e*
	кінець	*b*	*c*	*c*	*d*	*d*	*d*	*e*	*e*	*f*	*g*

Як бачимо, у кожному стовпці матриці інцидентності є тільки два елементи, відмінних від нуля (або один, якщо ребро – петля).

Матриця суміжності симетрична щодо головної діагоналі.

Список ребер є найбільш компактним способом завдання графів.

Кожний із наданих способів однозначно описує граф, зображений на рис. 5.11.

<u>Приклад 5.10.</u> Задати матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер орієнтований граф, зображений на рис. 5.12.

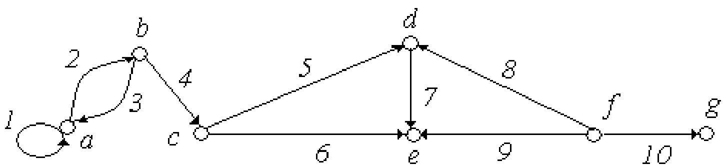


Рис. 5.12.

Розв'язання:

Матриця інциденотності

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1	0	-1	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0
f	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця суміжності

	a	b	c	d	e	f	g
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	0
f	0	0	0	1	1	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0

Список ребер

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вершини	початок	*a*	*a*	*b*	*b*	*c*	*c*	*d*	*f*	*f*	*f*
	кінець	*a*	*b*	*a*	*c*	*d*	*e*	*e*	*d*	*e*	*g*

Відмінність матриці інцидентності орієнтованого графа від неорієнтованого складається у вказівці початку і кінця ребер. Матриця суміжності втрачає свою симетричність. У списку ребер важливий порядок вказівки вершин, що з'єднують зазначеним ребром (від початку до кінця).

Як відзначалося вище, всі розглянуті способи завдання графів однозначно визначають граф. Виникає питання: чи можливо відновити граф по заданих матрицях інцидентності, суміжності або списку ребер? Очевидна позитивна відповідь.

По матриці інцидентності число ребер і вершин визначається з розмірності матриці: число ребер $|E|$ графа дорівнює числу стовпців m, а число вершин $|V|$ - числу рядків n матриці.

По матриці суміжності число вершин визначається з розмірності матриці. Як було відзначено, матриця суміжності н-графа симетрична щодо головної діагоналі, і кількість ребер визначається верхнім правим трикутником матриці, розташованим над головною діагоналлю, включаючи останню. Тобто, число ребер н-графа дорівнює сумі елементів, розташованих на головній діагоналі і у верхньому правому трикутнику. У матриці суміжності орграфа симетрія відсутня, а число ребер дорівнює сумі всіх елементів матриці суміжності.

Список ребер є скороченим варіантом матриці інцидентності. Кількість ребер очевидна, а кількість вершин дорівнює максимальному номеру всіх перерахованих вершин зі списку.

Тобто, матриця інцидентності і список ребер по суті, еквівалентні, то знаючи матрицю інцидентності можна записати список ребер, і навпаки.

Побудова матриці інцидентності за списком ребер. Кожен рядок списку ребер відповідає рядку в матриці инцидентности з тим же номером. Для неорієнтованого графа в кожному рядку списку ребер зазначені номери елементів матриці инцидентности, рівні 1 (всі інші елементи – нулі). Для орієнтованого графа першою вказується вершина, що відповідає початку ребра (у матриці инцидентности – елемент -1), а другий – відповідному кінцю ребра (у матриці инцидентности – елемент 1). При збігу елементів у рядку списку ребер, у відповідному рядку матриці инцидентности записується число, відмінне від -1, 0, 1, наприклад, 2. Така ситуація відповідає наявності у графі петель.

5.3. Зв'язність графа. Маршрути, шляхи, ланцюги, цикли

5.3.1. G -неорієнтований граф

<u>Визначення 5.16.</u> *Маршрутом (шляхом)* у графі G називається така послідовність ребер $M(e_1, e_2, ..., e_n)$, у якій кожні два сусідніх ребра e_{i-1} і e_i мають загальну вершину. У маршруті те саме ребро може зустрічатися кілька разів. Іншими словами *маршрут* – це сукупність ребер, які об'єднані разом вершинами так, що можна рухатися по них уздовж графа.

<u>Визначення 5.17.</u> *Початок маршруту* – це вершина v_0, інцидентна ребру e_1 і не інцидентна ребру e_2. *Кінець маршруту* – це вершина v_n інцидентна ребру e_n і не інцидентна e_{n-1}.

Якщо ребра e_1, e_2 (e_{n-1}, e_n) - кратні, то необхідно додатково вказувати, яку із двох інцидентних вершин вважати початком (кінцем) маршруту.

Визначення 5.18. *Маршрут довжини* k - послідовність, що містить k ребер. Іншими словами, *довжиною маршруту* називається кількість ребер у ньому; при цьому кожне ребро враховується стільки разів, скільки разів воно зустрічається в маршруті.

Позначення маршруту з v_0 у v_n - послідовністю $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 .... v_{n-1} e_n v_n$ надлишкове, тому ми будемо позначати маршрут як $v_0 v_1 v_2 .... v_{n-1} v_n$.

Визначення 5.19. Маршрут, всі ребра якого різні, називається *ланцюгом*. Ланцюг, що не перетинає себе, тобто не має вершин, що повторюються, називається *простим*.

Приклад 5.11. Визначити можливі маршрути (і їхню довжину) з вершини v_0 в v_8 у графі, зображеному на рис. 5.13.

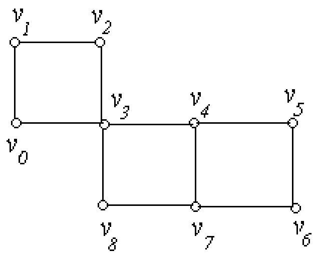


Рис. 5.13.

Розв'язання: з вершини v_0 у v_8 ведуть, наприклад, шляхи:

1) $v_0 v_3 v_8$ - довжини 2;   5) $v_0 v_3 v_4 v_5 v_4 v_7 v_8$ - довжини 6;

2) $v_0v_1v_2v_3v_8$ - довжини 4; 6) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_8$ - довжини 6;

3) $v_0v_3v_4v_7v_8$ - довжини 4; 7) $v_0v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 8;

4) $v_0v_3v_4v_5v_6v_7v_8$ - довжини 6; 8) $v_0v_1v_2v_3v_4v_7v_6v_5v_4v_3v_8$ -довж. 10.

Шляхи: 6), 8) не є простими.

Визначення 5.20. Маршрут, у якому збігаються початок і кінець - v_0 і v_n - називається *циклічним*. Циклічний маршрут називається *циклом*, якщо він є ланцюг, і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

Наприклад, маршрут $v_0v_1v_2v_3v_0$ для графа, зображеного на рис. 5.13, є простим циклом; а маршрут $v_3v_4v_5v_6v_7v_4v_3$ є циклом, але не буде простим, тому що містить вершини, які повторюються.

Визначення 5.21. Вершини v' і v'' графа G називаються *зв'язаними*, якщо існує маршрут з початком у v' і кінцем у v''. Маршрут між зв'язаними вершинами може бути поданий простим ланцюгом.

Визначення 5.22. Граф G називається *зв'язним*, якщо будь-які пари його вершин зв'язані між собою.

Приклад 5.12. Граф, зображений на рис. 5.14,а – не зв'язний, а граф на рис. 5.14,б – зв'язний.

Рис. 5.14.

<u>Теорема 5.3.</u> Якщо існує маршрут з вершини v_0 в v_n графа G, то існує простий ланцюг, що з'єднує вершини v_0 і v_n.

<u>Наслідок.</u> Граф G є зв'язним тоді і лише тоді, коли між будь-якими двома його вершинами існує простий ланцюг.

<u>Визначення 5.23.</u> Максимальний непустий зв'язний підграф G' графа G називається *компонентом* графа G.

Отже, кожен граф являє собою об'єднання своїх компонент, які попарно не перетинаються.

Незв'язний граф має, як мінімум, два компоненти. Наприклад, граф, зображений на рис. 5.14,а, має два компоненти: v_1v_2 і $v_3v_4v_5$.

<u>Визначення 5.24.</u> Вершина v називається *точкою зчленування*, якщо видалення її із графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

<u>Визначення 5.25.</u> Ребро e називається *мостом*, якщо видалення його із графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Наприклад, у графі, зображеному на рис. 5.13 вершина v_3 є точкою зчленування, а ребро, що з'єднує вершини v_1v_2 - мостом.

5.3.2. G - орієнтований граф

<u>Визначення 5.26.</u> Послідовність ребер, у якому кінець кожного попереднього ребра e_{i-1} збігається з початком наступного e_i, називається *шляхом* або *орієнтованим* *маршрутом*. У шляху те саме ребро може зустрічатися кілька разів.

Визначення 5.27. *Початком шляху* є вершина v_0 ребра e_1, а *кінцем шляху* є вершина v_n ребра e_n.

Визначення 5.28. *Довжиною орієнтованого маршруту* називається кількість орієнтованих ребер, що входять до цього шляху.

Приклад 5.13. Для графа, зображеного на рис. 5.15, приведемо приклади орієнтованих маршрутів з вершини v_0 до вершини v_6: $v_0v_1v_3v_6$; $v_0v_2v_5v_6$; $v_0v_4v_3v_6$ - довжини 3; $v_0v_2v_5v_4v_3v_6$ - довжини 5.

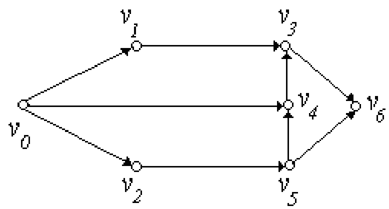
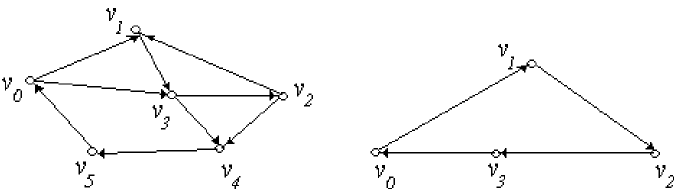


Рис. 5.15.

Визначення 5.29. *Орієнтованим ланцюгом* називається шлях, кожне ребро якого зустрічається не більше одного разу, і *простим ланцюгом*, якщо будь-яка вершина орграфа G інцидентна не більш ніж двом його ребрам.

Визначення 5.30. *Контуром* називається шлях, початок v_0 і кінець v_n якого збігаються. Контур називається *циклом*, якщо він є ланцюгом, і *простим циклом* – якщо це простий ланцюг.

Приклад 5.14. Для графа, зображеного на рис. 5.16,а, приклади: орієнтованого ланцюга - $v_0v_1v_3v_2v_4v_5$; контуру - $v_0v_1v_3v_2v_1v_3v_4v_5v_0$; циклу - $v_0v_3v_4v_5v_0$. Для графа, зображеного на рис. 5.16,б, приклади: простого орієнтованого ланцюга - $v_0v_1v_2$; простого циклу - $v_0v_1v_2v_3v_0$. При цьому зауважимо, що при записі циклу як для орієнтованого, так і для неорієнтованого графа, як початком, так і кінцем може бути обрана будь-яка вершина. Наприклад: $v_1v_2v_3v_0v_1$; $v_2v_3v_0v_1v_2$ і т.п.

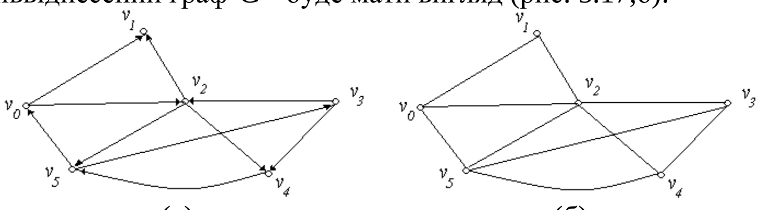


(а) (б)

Рис. 5.16.

Визначення 5.31. Для кожного орієнтованого графа G може бути побудований неорієнтований граф G^s, такий, що всі вершини цих графів збігаються, а кожне ребро G (крім петель), стане неорієнтованим ребром графа G^s. У такому випадку граф G^s називається *співвіднесеним графом* орієнтованого графа G.

Приклад 5.15. Для графа G, зображеного на рис. 5.17,а, співвіднесений граф G^s буде мати вигляд (рис. 5.17,б):



(а) (б)

Рис. 5.17.

Визначення 5.32. Вершина $v'' \in G$ називається *досяжною* з вершини $v' \in G$, якщо існує шлях з початком у v' і кінцем у v''.

Визначення 5.33. Орієнтований граф G називається *зв'язним*, якщо його співвіднесений граф G^s є зв'язним. Орієнтований граф називається *сильно зв'язним*, якщо для будь-якої пари вершин v', v'' існує орієнтований шлях з v' у v''.

Так, наприклад, граф, зображений на рис. 5.17,а, є зв'язним, але не є сильно зв'язним.

5.4. Метрика на графах

Визначення 5.34. *Відстанню* $d(v',v'')$ між вершинами v' і v'' графа G називається мінімальна довжина простого ланцюга з початком у вершині v' і кінцем у вершині v''. Якщо вершини v' і v'' не з'єднані ланцюгом, тобто належать різним компонентам, то покладається, що $d(v',v'')=\infty$.

У зв'язному графі G відстань між вершинами задовольняє наступним умовам:

1) $\forall v',v'' \in G$, $d(v',v'') \geq 0$ і $d(v',v'')=0$ тоді і тільки тоді, коли $v'=v''$;

2) $\forall v',v'' \in G$, $d(v',v'')=d(v'',v')$;

3) $\forall v',v'',v''' \in G$, $d(v',v'') \leq d(v',v''')+d(v''',v'')$.

Функція $d(v',v'')$, що задовольняє трьом перерахованим умовам, називається *метрикою графа*.

<u>Визначення 5.35.</u> *Центром графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б мінімальною.

<u>Визначення 5.36.</u> *Периферійною точкою графа* називається вершина, від якої максимальна з відстаней до інших вершин була б максимальна.

<u>Визначення 5.37.</u> Максимальна відстань від центра графа G до його вершин називається *радіусом графа* $r(G)$.

<u>Визначення 5.38.</u> Найпростіший ланцюг найкоротшої довжини називається *геодезичним*.

<u>Визначення 5.39.</u> *Відхиленням вершини* $l(v)$ називається найбільша довжина геодезичної, яка з неї виходить.

У зв'язку із цим можна дати ще одне визначення радіуса графа:

<u>Визначення 5.40.</u> Відхилення центра називається *радіусом* графа $r(G)$, а відхилення периферійної точки – *діаметром* графа $D(G)$.

Алгоритм знаходження відстаней від даної вершини v_0 ***до інших вершин графа*** G :

1) позначаємо через $A_0 = \{v_0\}$;

2) позначаємо індексом 0 всі вершини, суміжні з вершиною v_0, виписуємо множину A_1 всіх цих вершин з їхніми позначками;

3) кожну вершину, що не належить множині $A_0 \cup A_1$ і суміжну з кожною з вершин, що належать множині

A_1, позначаємо індексом v'; виписуємо множину A_2 всіх цих вершин з їхніми позначками …;

n) повторюємо описану процедуру доти, поки множина непомічених вершин не виявиться порожньою.

Приклад 5.16. Визначити відстань від вершини 7 (для зручності запису позначимо вершини графа арабськими цифрами) до всіх вершин графа G, зображеного на рис 5.18.

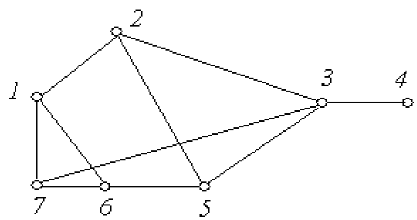


Рис. 5.18.

Розв'язання: За алгоритмом відстань від вершини 7 будемо шукати в такий спосіб:

$$1)\ A_0 = \{7\};\ 2)\ A_1 = \{1_7, 3_7, 6_7\};\ 3)\ A_2 = \{2_{1,3}, 5_{3,6}, 4_3\}.$$

Більше непомічених вершин немає. Тобто відстані від вершини 7 до кожної з вершин графа такі:

$$d(7,1) = d(7,3) = d(7,6) = 1;\ d(7,2) = d(7,4) = d(7,5) = 2\ .$$

Для визначення центра і радіуса графа необхідно побудувати для нього *матрицю відстаней* A, кожен елемент якої a_{ij} описує відстань між вершинами i і j графа G, тобто $a_{ij} = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що матриця відстаней A симетрична щодо головної діагоналі (елементи якої дорівнюють нулю, тому що $d(v_i, v_i) = 0$).

Приклад 5.17. Визначити центр, периферійні вершини, радіус і діаметр графа G , зображеного на рис. 5.19.

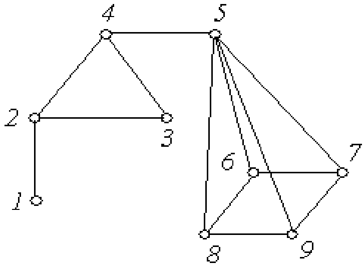


Рис. 5.19.

Розв'язання: Матриця відстаней графа G має вигляд.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	2	3	4	4	4	4
2	1	0	1	1	2	3	3	3	3
3	1	1	0	1	2	3	3	3	3
4	2	1	1	0	1	2	2	2	2
5	3	2	2	1	0	1	1	1	1
6	4	3	3	2	1	0	1	1	2
7	4	3	3	2	1	1	0	1	1
8	4	3	3	2	1	1	1	0	1
9	4	3	3	2	1	2	1	1	0

Знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа $l(v_i)$ як $\max\limits_{1\le j\le 9} a_{ij}$:

$l(1)=4$; $l(2)=3$; $l(3)=3$; $l(4)=2$; $l(5)=3$; $l(6)=4$; $l(7)=4$; $l(8)=4$; $l(9)=4$.

Отже, за визначеннями 5.35, 5.36, центром графа є вершина 4; периферійні вершини – 1, 6, 7, 8, 9. Радіус графа $r(G)=2$, а діаметр графа $D(G)=4$.

6. АЛГОРИТМИ Й АВТОМАТИ

6.1. Алгоритми

Алгоритм у математиці ***є первісним поняттям***, таким, як точка, число, множина і т. п. Його строге математичне означення неможливе¸ тому спираються на інтуїтивні уявлення, що формуються практикою. Відомі правила множення "у стовпчик" і ділення "кутом" натуральних чисел, схема Горнера обчислення значення многочлена, спосіб побудови серединного перпендикуляра до відрізка – все це алгоритми.

<u>Визначення 6.1.</u> Під ***алгоритмом*** розуміють правило (процедуру, спосіб, схему, інструкцію) знаходження для довільного вхідного об'єкта з даного класу за допомогою скінченної послідовності певних елементарних операцій вихідного об'єкта. Ця послідовність є строго детермінованою, передбачені всі можливі випадки й однозначно вказані відповідні переходи.

Кожний алгоритм оперує з ***даними*** (об'єктами) ***трьох типів*** – ***вхідними*** (з них починається робота), ***проміжними*** (з'являються і використовуються в ході функціонування) і ***вихідними*** (служать остаточними результатами). Для конкретного алгоритму ці дані повинні бути чітко визначеними, відрізнятися один від одного між собою і всі разом від об'єктів, з якими алгоритм не працює.

<u>Визначення 6.2.</u> Довільну непорожню скінченну множину Σ називають ***алфавітом***. Елементи алфавіту – його ***символи*** (***букви***, ***літери***, ***сигнали***). Скінченна упорядкована послідовність букв алфавіту Σ утворює ***слово***. Порожнє слово e не місить жодної літери. Множина всіх слів у алфавіті Σ позначається Σ^*.

Наприклад, $\mathrm{A} = \{0,1\}$ – алфавіт. П'ять слів у ньому 10, 11, 100, 110, 111 можна інтерпретувати як числа відповідно 2, 3, 4, 6, 7, подані у двійковій системі числення.

Припустимо, що об'єкти, з якими оперує алгоритм A, можна кодувати за допомогою слів відповідно вхідного X, проміжного S і вихідного Y алфавітів. Тобто, вважатимемо, що алгоритм A одержує на вхід слова вхідного алфавіту X з ***області*** його ***застосування*** (***області визначення***) $D(A)$, $D(A) \subseteq X$, у ході роботи використовує слова проміжного алфавіту S і як кінцевий результат виробляє слова вихідного алфавіту Y. Якщо на вхід алгоритму A подати слово, що не входить у його область визначення $D(A)$, то вихідного слова не отримаємо.

Слово – найзагальніший тип алгоритмічних даних. При цьому довжина слова (кількість символів у ньому) служить для вимірювання об'єму інформації, що обробляє алгоритм.

Алгоритмічні дані для свого розміщення потребують пам'яті. ***Пам'ять*** вважається ***однорідною*** і ***дискретною***, тобто складається з окремих однакових комірок (регістрів), причому кожна комірка може містити лише один символ алфавіту.

<u>Основні властивості алгоритмів</u>:

а) ***Дискретність*** і ***результативність*** (***скінченність***): якщо на вхід подано слово з області застосування алгоритму, то в процесі виконання, після скінченного числа окремих кроків, настає зупинка з видачею певного результату. Зокрема, якщо двічі запустити алгоритм з одним і тим же вхідним словом, то результати будуть однаковими.

б) ***Детермінованість*** (***однозначна визначеність***): після кожного кроку дається команда зупинитися або вказується, який крок виконувати далі.

в) ***Масовість*** (***універсальність***): алгоритм дає змогу розв'язувати не одну, а цілий клас задач. Тобто, вхідні дані можуть варіюватися в досить широких межах.

г) ***Замкнутість***: для реалізації алгоритму треба чітко слідувати інструкції (схемі алгоритму) і не використовувати інших зовнішніх даних, крім вхідного слова.

Орієнтований граф, у якому вершинам відповідають кроки, а дугам – переходи між кроками, називають ***блок-схемою алгоритму*** (рис. 6.1). Вершини можуть бути двох типів: з однією вихідною дугою (безумовні) чи з двома вихідними дугами (логічні умови). Процес реалізації алгоритму – це певний шлях у графі.

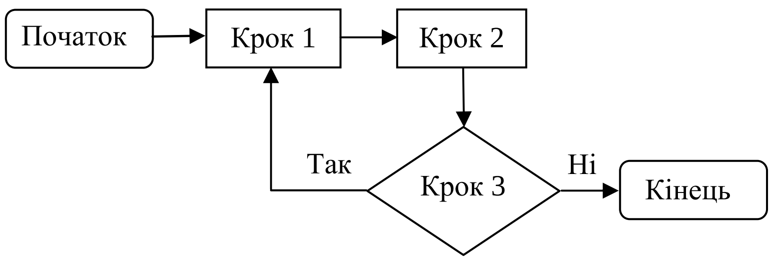


Рис. 6.1

На якість розв'язування конкретних задач часто більше впливає вибір алгоритму, ніж характеристики технічних засобів його реалізації. ***Критеріями ефективності*** алгоритму служать:

а) оцінка часу одержання повного розв’язку задачі; б) оцінка зростання місткості пам’яті при збільшенні об’єму вхідних даних.

6.2. Скінченні автомати. Загальні поняття

Скінченний автомат служить математичною моделлю реальних дискретних перетворювачів інформації.

<u>Визначення 6.3.</u> ***Автомат*** – це схематизований алгоритм, у якому переходи виконуються детерміновано залежно від зовнішніх впливів (вхідних даних). Вважається, що

1) Автомат функціонує в абстрактному дискретному часі.

2) Усі переходи відбуваються миттєво.

Скінченний автомат можна зобразити у вигляді схеми (рис. 6.2), що складається з ***вхідної стрічки***, ***односторонньої вхідної голівки***. що зміщується тільки вправо, і ***керуючого пристрою зі скінченним числом станів*** (***зі скінченною пам’яттю***).

Рис. 6.2

Вхідна стрічка – це лінійна послідовність комірок, кожна з яких містить один і лише один вхідний символ a_i. На рис. 6.2 кінцеві ліва і права комірки ділянки, що обробляється автоматом, позначені ***кінцевим маркером*** λ, а ***порожня комірка*** позначена як ε.

Вхідна голівка у кожний момент обробляє одну комірку вхідної стрічки.

Керуючий пристрій має скінченну множину станів $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$, що характеризуються певним набором внутрішніх змінних і відіграють роль деякої пам'яті про його передісторію. Він містить відображення, що залежно від попереднього стану і поточного вхідного символу визначають наступний стан керуючого пристрою, переміщення вхідної голівки й вихідну інформацію.

Запуск (start) роботи скінченного автомату здійснюється з його ***початкової конфігурації*** – керуючий пристрій знаходиться у заданому ***початковому стані***, вхідна голівка виставлена на крайній лівий символ ділянки вхідної стрічки. На кожному t-му ***такті*** (***кроці***) $(t = 1, 2, ...)$ роботи автомату виконуються наступні операції:

1) вхідна голівка читає одну поточну вхідну комірку;

2) залежно від прочитаного вхідного символу і поточного стану керуючого пристрою цей стан змінюється чи залишається тим самим;

3) якщо це передбачено, голівка заносить у комірку вихідний символ;

4) вхідна голівка зміщується на одну комірку вправо або залишається нерухомою. Автомат завершує функціонування, досягши одного зі заздалегідь указаних ***завершальних станів*** або обробивши всю задану ділянку вхідної стрічки. Ці умови зупин-

ки повинні бути однозначно встановленими.

Визначення 6.4. Скінченним автоматом A називається система

$$A = (S, X, Y, f, g, s_0, F),$$

де $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ – ***вхідний алфавіт***; $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ – ***вихідний алфавіт***; $S = \{s_1, s_2, ..., s_k\}$ – ***алфавіт станів***; $f(s, x)$ – ***функція переходів***, що є відображенням множини $S \times X$ в алфавіт S і визначає вибір наступного стану; $g(s, x)$ – ***функція виходів***, що є відображенням множини $S \times X$ в алфавіт Y і визначає вихідний символ; s_0 – ***початковий стан*** керуючого пристрою, $s_0 \in S$; F – множина ***завершальних станів***, $F \subseteq S$.

Функція переходів має вигляд $s(t) = f(s(t-1), x(t))$, де $t = 1, 2, ...$ – номер такту (кроку, дискретного моменту часу).

Множина Y і функція виходів g можуть бути відсутніми, якщо не передбачено видачі вихідної інформації. Маємо автомат ***без виходу***. У ньому голівка ***тільки читаюча*** (без друку – не створює вихідного слова).

Якщо автомат містить множину Y і функцію g виходів, то маємо автомат ***з виходом***. У ньому голівка ***читаюча*** і ***пишуча*** (з друком – створює вихідне слово).

Для опису функцій f і g аналітичний спосіб, як правило, не застосовується. Звичайно використовується табличне чи графічне подання.

Оскільки функції f і g визначені на скінченних множинах, то їх можна задавати таблицями з двома входами, де на перетині стовпця s і рядка x стоїть значення функції $f(s,x)$ і $g(s,x)$ відповідно. Функція f задається ***таблицею переходів***, а функція g – ***таблицею виходів***. Звичайно ці таблиці суміщають в одну, що називається ***таблицею автомату*** (***автоматною таблицею***). В автоматній таблиці на перетині стовпця s і рядка x стоїть пара *наступний стан, вихідний символ*.

Крім того, скінченний автомат можна задати орієнтованим графом (точніше псевдографом, оскільки можливі кратні дуги і петлі), що називається ***діаграмою*** (***графом***) ***автомату***. Вершини відповідають *станам*, а дуги – *переходам* з одного стану в інший. Кожна дуга позначена відповідною парою *вхідний символ, вихідний символ*.

Для довільної діаграми автомату в кожній вершині s_j справджуються наступні ***умови коректності***:

1) Для будь-якої вхідної літери x_i існує дуга, що виходить із s_j і на якій написано x_i (***умова повноти***).

2) Будь-яка вхідна літера x_i зустрічається тільки на одній дузі, що виходить із s_j (***умова детермінованості***).

Автомат A називається ***частковим*** (***не повністю визначеним***), якщо хоча б одна з двох його функцій f і g не повністю визначена, тобто для деяких пар s, x значення функцій f або g не визначені. У таблиці автомату його не повна визначеність проявляється в тому, що деякі її комірки незаповнені (порожні).

Частковий автомат застосовується, коли деякі пари s, x не можуть виникнути в реальних умовах функціонування. Для виконання різних перетворень частковий автомат довизначають, виходячи з міркувань зручності.

При побудові (синтезі) автомату, що служить моделлю деякої системи, звичайно вхідний і вихідний алфавіти безпосередньо визначаються вхідними впливами і реакцією на них. Вибір множини станів, що зв’язані з внутрішньою структурою системи, – досить складний процес, який не формалізовано. Він потребує аналізу суті системи і, як правило, реалізується методом спроб і помилок.

Автомати різної конфігурації можуть реалізовувати одну й ту ж функцію. Два автомата називаються ***еквівалентними***, якщо вони з точністю до позначень мають однакові вхідні та вихідні алфавіти і на однакові вхідні слова видають однакові вихідні слова.

6.3. Автомати Мілі та Мура. Зв’язок між ними

Розрізняють два основних види скінченних автоматів:

1) ***Автомат Мілі***, в якому вихідна інформація відповідає переходу, тобто функція виходів має вигляд $y(t) = g(s(t-1), x(t))$.

2) ***Автомат Мура***, в якому вихідна інформація відповідає лише поточному стану, тобто функція виходів має вигляд $y(t) = g(s(t))$.

Таким чином, закони функціонування автоматів Мілі та Мура відрізняються функцією виходів g.

Автомат Мура є окремим випадком автомату Мілі.

Приклад 6.1 (Автомат Мілі). Зобразити діаграму автомату A_1, на вхід якого можуть поступати у довільній послідовності і з можливими повторами купюри 1, 2 і 5 грн. Автомат продає квиток, якщо сума поданих купюр дорівнює 5 грн. У випадку перевищення суми автомат повертає гроші. Побудувати також його таблицю переходів, таблицю виходів і автоматну таблицю.

Розв'язання. Вхідний алфавіт в умові задачі задано явно: $X = \{1, 2, 5\}$, де вхідними символами є вартості купюр. За вихідний алфавіт приймемо $Y = \{К, П, Н\}$, де вихідні символи виражають наступне: $К$ – продаж квитка, $П$ – повернення грошей, $Н$ – автомат нічого не видає (специфічний “порожній” вихідний символ). Внутрішній стан автомату A_1 ототожнюємо з сумою, яку він пам'ятає. Маємо на увазі, що після продажу квитка чи повернення грошей ця сума стає нульовою. Таким чином алфавіт станів $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$, де індекс відповідає сумі. За початковий стан приймаємо s_0.

Діаграма цього автомату A_1 зображена на рис. 6.3.

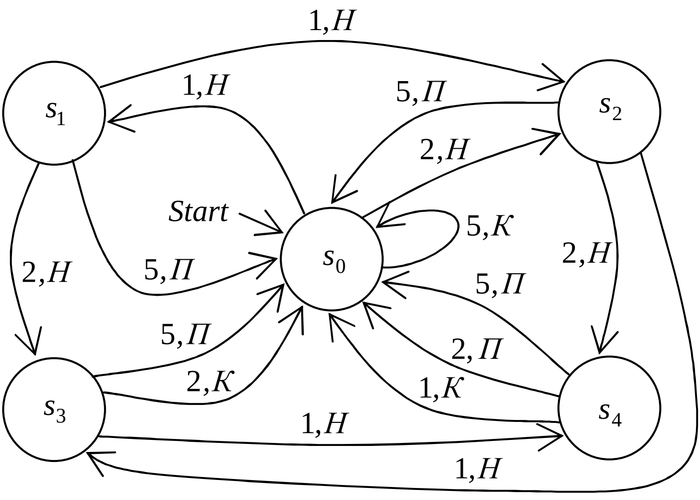


Рис. 6.3

Оскільки вихідний символ залежить як від стану, так і від вхідної літери, то маємо автомат Мілі.

Цей же автомат A_1 можна подати в табличній формі:

Таблиця переходів автомату Мілі A_1

$X \backslash S$	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_0
2	s_2	s_3	s_4	s_0	s_0
5	s_0	s_0	s_0	s_0	s_0

Таблиця виходів автомату Мілі A_1

$X \backslash S$	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
1	H	H	H	H	K
2	H	H	H	K	Π
5	K	Π	Π	Π	Π

Таблиця автомату Мілі A_1 (переходів і виходів)

$X \backslash S$	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
1	s_1, H	s_2, H	s_3, H	s_4, H	s_0, K
2	s_2, H	s_3, H	s_4, H	s_0, K	s_0, Π
5	s_0, K	s_0, Π	s_0, Π	s_0, Π	s_0, Π

Приклад 6.2 (Автомат Мура). Зобразити діаграму автомату A_2, на вхід якого можуть поступати у довільній послідовності з можливими повторами купюри 1, 2, 5 і 10 грн. Автомат видає символ Π, якщо сума поданих купюр парна, і символ H, якщо сума поданих купюр непарна. Автомат також видає символ Π, якщо відсутні подані купюри. Подати також цей автомат A_2 у табличній формі.

Розв'язання. В умові задачі явно задано: вхідний алфавіт $X = \{1, 2, 5, 10\}$, де вхідними символами є вартості купюр, і вихідний алфавіт $Y = \{П, Н\}$, де вихідні символи відповідають парній і непарній сумі поданих купюр. Внутрішній стан автомату A_2 ототожнюємо з парністю чи непарністю указаної суми. Таким чином алфавіт станів $S = \{s_0, s_1\}$, де індекс 0 відповідає парній сумі, а індекс 1 – непарній. За початковий стан приймаємо s_0, оскільки за умовою s_0 також відповідає відсутності поданих купюр.

Оскільки вихідний символ однозначно визначається поточним станом (більше того, в даному алгоритмі A_2 стани ототожнені з відповідними вихідними символами), то маємо автомат Мура. У такому автоматі, для спрощення, вихідні символи можна приписати безпосередньо до станів. Відповідно спрощується його діаграма, а табличне подання зводиться до однієї ***розширеної таблиці переходів***, у якій додано верхній рядок, де кожному стану прописаний свій вихідний символ.

Діаграма цього автомату A_2 зображена на рис. 6.4, а далі наведено розширену таблицю переходів.

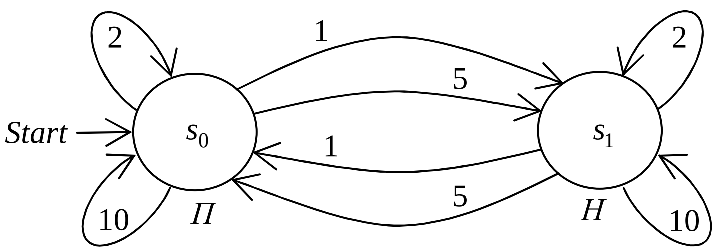


Рис. 6.4

Розширена таблиця переходів автомату Мура A_2

Y	$П$	$Н$
$X \backslash S$	s_0	s_1
1	s_1	s_0
2	s_0	s_1
5	s_1	s_0
10	s_0	s_1

Перехід від Мура до Мілі.

Для переходу від автомату Мура до еквівалентного автомату Мілі у випадку графічного подання треба на діаграмі автомату кожний вихідний символ, раніше приписаний до вершини, перенести на всі вхідні у цю вершину дуги.

Наприклад, для автомату Мура A_2 (рис. 6.4) еквівалентний автомат Мілі $\overline{A}_2$ має діаграму, зображену на рис. 6.5.

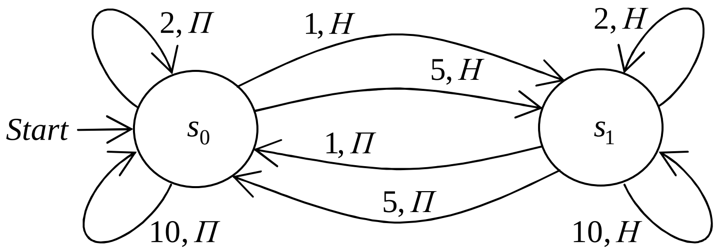


Рис. 6.5

У випадку табличного подання треба у розширеній таблиці переходів автомату Мура відкинути перший рядок із вихідними символами. Таблиця виходів одержується з отриманої таблиці переходів заміною станів, у які переходить автомат, на приписані їм автоматом Мура вихідні символи.

Наприклад, для автомату Мура A_2 еквівалентний автомат Мілі $\overline{A}_2$ має наступні таблиці переходів, виходів і автоматну:

Таблиця переходів автомату Мілі $\overline{A}_2$

$X \backslash S$	s_0	s_1
1	s_1	s_0
2	s_0	s_1
5	s_1	s_0
10	s_0	s_1

Таблиця виходів автомату Мілі $\overline{A}_2$

$X \backslash S$	s_0	s_1
1	H	$П$
2	$П$	H
5	H	$П$
10	$П$	H

Таблиця автомату Мілі $\overline{A}_2$

$X \backslash S$	s_0	s_1
1	s_1, H	$s_0, П$
2	$s_0, П$	s_1, H
5	s_1, H	$s_0, П$
10	$s_0, П$	s_1, H

Перехід від Мілі до Мура.

Множина станів $\overline{S}$ еквівалентного автомату Мура формується так: кожному стану s_i, $i = \overline{1,k}$ автомату Мілі ставиться у відповідність множина $S^{(i)} = \{s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, ...\}$ всіх можливих пар вигляду $s_r^{(i)} = (s_i, y_j)$, де y_j – вихідний символ, приписаний дузі, що входить у вершину s_i. Кількість елементів у множині $S^{(i)}$ дорівнює числу різних вихідних символів на дугах, що входять у вершину s_i. Множиною станів $\overline{S}$ служить об'єднання $\overline{S} = \bigcup_{i=1}^{k} S^{(i)}$.

Кожний стан $\overline{s}_r$ синтезованого автомату Мура є парою вигляду (s_i, y_j), йому приписується відповідний вихідний символ y_j. Тобто, функція виходів $\overline{g}(\overline{s}_r) = y_j$.

Якщо в автоматі Мілі є перехід $f(s_i, x_p) = s_t$, якому відповідає вихід $g(s_i, x_p) = y_q$, то в еквівалентному автоматі Мура будуть переходи з кожного стану $s_r^{(i)} = (s_i, y_j) \in S^{(i)}$ до стану $s_r^{(t)} = (s_t, y_q)$ від впливом вхідного символу x_p.

За початковий стан синтезованого автомату Мура можна вибрати будь-який стан $s_r^{(0)}$ із множини $S^{(0)} = \{s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, ...\}$, що породжується початковим станом s_0 автомату Мілі.

Наприклад, для автомату Мілі A_1 (рис. 6.3) одержуємо наступний еквівалентний автомат Мура $\overline{A}_1$:

1) Вхідний і вихідний алфавіти:

$$\overline{X} = X = \{1, 2, 5\}; \qquad \overline{Y} = Y = \{К, П, Н\}.$$

2) Алфавіт станів $\overline{S}$:

$$S^{(0)} = \{(s_0, К), (s_0, П)\} = \{\overline{s}_0, \overline{s}_1\}; \;\; S^{(1)} = \{(s_1, Н)\} = \{\overline{s}_2\};$$

$$S^{(2)} = \{(s_2, Н)\} = \{\overline{s}_3\}; \;\; S^{(3)} = \{(s_3, Н)\} = \{\overline{s}_4\};$$

$$S^{(4)} = \{(s_4, Н)\} = \{\overline{s}_5\};$$

$$\overline{S} = S^{(0)} \bigcup S^{(1)} \bigcup S^{(2)} \bigcup S^{(3)} \bigcup S^{(4)} = \{\overline{s}_0, \overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3, \overline{s}_4, \overline{s}_5\}.$$

3) Функція виходів $\overline{g}(\overline{s}_r)$:

$$\overline{g}(\overline{s}_0) = К; \quad \overline{g}(\overline{s}_1) = П; \quad \overline{g}(\overline{s}_2) = Н; \quad \overline{g}(\overline{s}_3) = Н;$$

$$\bar{g}(\bar{s}_4) = H\ ; \quad \bar{g}(\bar{s}_5) = H\ .$$

4) Функція переходів $\bar{f}(\bar{s}_r, x_p)$:

$$\bar{f}(\bar{s}_0, 5) = \bar{s}_0\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_1, 5) = \bar{s}_0\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_0, 1) = \bar{s}_2\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_1, 1) = \bar{s}_2\ ;$$

$$\bar{f}(\bar{s}_0, 2) = \bar{s}_3\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_1, 2) = \bar{s}_3\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_2, 1) = \bar{s}_3\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_2, 2) = \bar{s}_4\ ;$$

$$\bar{f}(\bar{s}_2, 5) = \bar{s}_1\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_3, 1) = \bar{s}_4\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_3, 2) = \bar{s}_5\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_3, 5) = \bar{s}_1\ ;$$

$$\bar{f}(\bar{s}_4, 1) = \bar{s}_5\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_4, 2) = \bar{s}_0\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_4, 5) = \bar{s}_1\ ;$$

$$\bar{f}(\bar{s}_5, 1) = \bar{s}_0\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_5, 2) = \bar{s}_1\ ; \quad \bar{f}(\bar{s}_5, 5) = \bar{s}_1\ .$$

5) За початковий стан прийнято $\bar{s}_0$.

Діаграму синтезованого автомату Мура $\overline{A}_1$ зображено на рис. 6.6, а далі наведено розширену таблицю переходів.

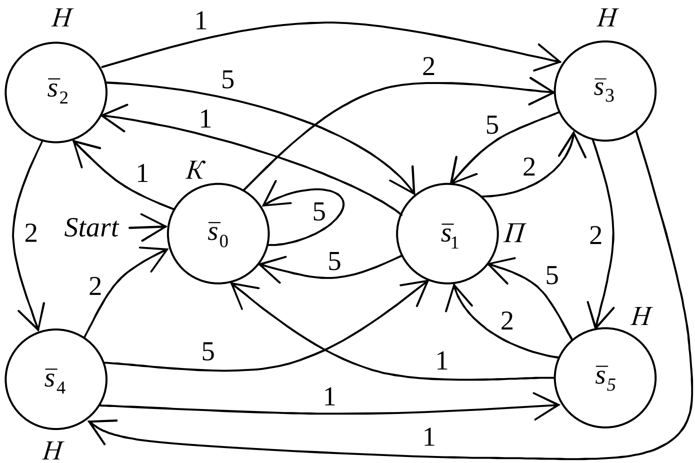


Рис. 6.6

Розширена таблиця переходів автомату Мура $\overline{A}_1$

Y	K	Π	H	H	H	H
$X \backslash \overline{S}$	$\overline{s}_0$	$\overline{s}_1$	$\overline{s}_2$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_4$	$\overline{s}_5$
1	$\overline{s}_2$	$\overline{s}_2$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_4$	$\overline{s}_5$	$\overline{s}_0$
2	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_4$	$\overline{s}_5$	$\overline{s}_0$	$\overline{s}_1$
5	$\overline{s}_0$	$\overline{s}_0$	$\overline{s}_1$	$\overline{s}_1$	$\overline{s}_1$	$\overline{s}_1$

Перехід від Мура до Мілі не змінює числа станів автомату, тоді як зворотній перехід, як правило, приводить до його зростання.

Одним з критеріїв складності автомату є число його станів. Чим менше це число, тим простіший дискет-ний пристрій, що реалі-зує даний автомат. Тому важливою задачею є побудова еквівалентного автомату з найменшим числом станів.

Ідея методів мінімізації полягає у розбитті на основі властивостей відношення еквівалентності скінченої множини станів на неперетинні підмножини – ***класи еквівалентності***, кожний з яких потім замінюється одним станом. Одержаний мінімальний автомат матиме стільки станів, скільки класів еквівалентності буде виявлено.

7. КОМБІНАТОРИКА

У цім розділі вирішуються деякі задачі, пов'язані з розглядом різних ***комбінацій*** з елементів кінцевих множин M. Наприклад, якщо взяти 10 різних цифр 0, 1, 2, ... , 9 і утворювати з них комбінації, то будемо одержувати різні числа, наприклад 345, 534, 1036, 5472, 45, 54 і т.п.

Видно, що деякі з таких комбінацій відрізняються тільки порядком цифр (наприклад 345 і 534), інші - вхідними в них цифрами (наприклад 1036 і 5472), треті - розрізняються і порядком і числом цифр (наприклад 345 і 54).

Отримані комбінації задовольняють різним умовам. Залежно від правил їх утворення можна виділити три типи комбінацій: ***перестановки, розміщення, сполучення***. Розглянемо їх окремо.

7.1. Перестановки

Визначення 7.1. Комбінації з n елементів, які відрізняються друг від друга тільки порядком елементів, називаються ***перестановками***.

Перестановки позначаються символом P_n, де n — число елементів, що входять у кожну перестановку.

Приклад 7.1. Нехай множина M містить три букви A, B, C. Складемо всі можливі комбінації із цих букв: *ABC, ACB, BCA, CAB, CBA, BAC* (усього 6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються друг від друга тільки порядком розташування букв.

Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 = P_3$, але $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ Прийшли до відомого у математиці поняттю факторіала.

Визначення 7.2. Добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно називають ***n-факторіалом*** і пишуть: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$. Вважають, що $0! = 1$ і $n \in N$. Основна властивість факторіала: $(n + 1)! = (n + 1)\, n!$.

Отже, число перестановок обчислюємо за формулою:

$$P_n = n! \qquad (7.1)$$

7.2. Розміщення

<u>Визначення 7.3</u>. Комбінації з n елементів по m елементів, які відрізняються друг від друга або самими елементами або порядком елементів, називаються ***розміщеннями***.

Розміщення позначаються символом A_n^m, де n - число всіх наявних елементів, m - число елементів у кожній комбінації. Число розміщень можна обчислити по формулі:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1), \text{ де } 0 \le m \le n;\ m, n \in N. \quad (7.2)$$

Вважають, що $A_n^0 = 1$.

<u>Приклад 7.2.</u> Нехай множина *M* містить чотири букви *A, B, C, D*. Склавши всі комбінації тільки із двох букв, одержимо: *AB, AC, AD, BA, BP, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC.*

Бачимо, що всі отримані комбінації (їх 12) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації *BA* і *AB* вважаються різними).

За формулою (7.2) $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, що збігається з результатом наведеного приклада. Тут кожен рядок відповідає однієї із всіх наявних букв (*n=4)*, а число стовпців відповідає іншим буквам *(n-1=3)* , усього *4 · 3=12* різних комбінацій.

Формулу (7.2) можна записати у факторіальній формі:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (7.3)$$

Основні властивості розміщень:

1) $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$; 2) $A_n^n = P_n = n!$.

7.3. Сполучення

Визначення 7.4. ***Сполученнями*** називаються всі можливі комбінації з n елементів по m, які відрізняються друг від друга принаймні хоча б одним елементом *(m, n∈ N і n ≥ m).*

У загальному випадку число сполучень із *n* елементів по *m* дорівнює числу розміщень з *n* елементів по *m*, діленому на число перестановок з *m* елементів: $\tilde{N}_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$. Використовуючи для чисел розміщень і перестановок факторіальні формули $\grave{A}_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$ і $P_n = n!$, одержимо формулу числа сполучень у вигляді:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} . \tag{7.4}$$

Основні властивості сполучень:

1) $C_n^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$;

2) $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Приклад 7.3. Множина *M* утворена з чотирьох букв *A*, *B*, *C*, *D*. Скласти комбінації з двох букв, що відрізняються друг від друга хоча б одним елементом.

Маємо *AB*, *AC*, *AD*, *BP*, *BD*, *CD*. Виходить, що число сполучень з чотирьох елементів по двоє дорівнює 6. Це коротко записується так: $\tilde{N}_4^2 = 6$.

7.4. Розміщення з повтореннями

Розміщення з n елементів по k зображують упорядковані комбінації різних елементів множини M, $|M| = n$. Часто доводиться робити упорядковані комбінації з повтореннями деяких елементів. Наприклад, з множини $M = \{А, Б\}$ можна зробити вісім комбінацій з трьох елементів: *ААА, ААБ, АБА, БАА, БАБ, ББА, АББ, БББ*. Тут $n = 2$, $k = 3$. Такі упорядковані k-комбінації називають кортежами довжини k. Два кортежі (тобто дві загальні комбінації) вважаються однаковими, якщо вони мають однакову довжину і на місцях з однаковими номерами стоять однакові елементи.

<u>Визначення 7.5.</u> ***Розміщенням з повтореннями*** з n елементів по k називається кортеж довжини k з n елементів.

Кількість кортежів обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^k} = n^k . \tag{7.5}$$

Розглянутий вище приклад обчислюється за формулою (7.5) $\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$.

Дійсно, після заповнення першого місця кортежу довжиною k одним з n елементів (що можливо зробити n варіантами) заповнити друге місце кортежу можна знову будь-яким елементом з усієї множини (повторюючи в одному з варіантів елемент, який знаходиться на першому місці), і так далі k разів. За правилом добутку одержимо, що $\overline{A_n^k} = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$.

8. ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Задати різними способами елементи множини букв у слові «СВЯТО». Знайти потужність множини і булеана множини.

Розв'язання: Задамо множину

а) перерахуванням: $A = \{С, В, Я, Т, О\}$;

б) описом характеристичної властивості:

$$A = \{x | \text{буква у слові «СВЯТО»}\}.$$

За визначенням 1.2 потужність множини $|A| = 5$. За визначенням 1.6 потужність булана $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^5 = 32$.

Завдання 2. Задано множини $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$, $C = \{1,2,5,6,9,10\}$. Визначити наступні множини: $A + B, B \cap C, A \cup (C - B)$.

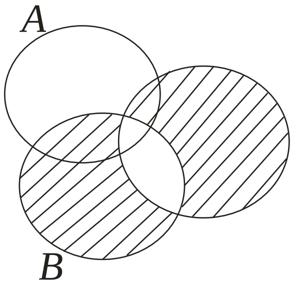
Розв'язання: За визначеннями 1.7 – 1.11 маємо

$A + B = \{1,3,5,7,8,10\}$; $B \cap C = \{2,6,10\}$;

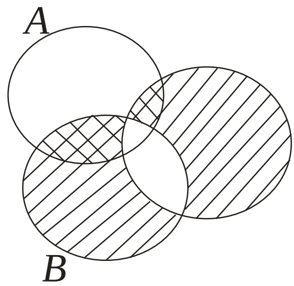
$A \cup (C - B) = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{1,5,9\} = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$.

Завдання 3. Для наведеної множини $A \cap (B + C)$ побудувати діаграму Венна, на якій штриховкою показати область, що зображує множину.

Розв'язання: Побудуємо спочатку множину $B + C$, а потім шукану множину $A \cap (B + C)$:

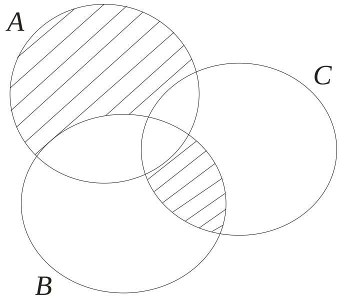


$B+C$



$A \cap (B+C)$

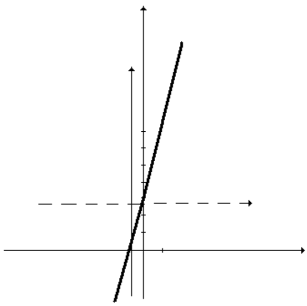
<u>Завдання 4.</u> За допомогою операцій над множинами описати множини, що відповідають зафарбованій частині діаграми Венна:



Розв'язання: Скористаємося приведеними у розділі 1.3 рис. 1.2, маємо:

$$A + (B \cap C).$$

<u>Завдання 5.</u> З'ясувати, чи є відношення $f = \{\langle x, y \rangle | y = 4x + 3, \quad x, y \in R\}$ функцією. Визначити її властивість. Якщо функція є взаємнооднозначною, знайти обернену.



Розв'язання: Побудуємо графік відношення. Дане відношення є функцією, тому що не існує елементів, які мають однакові перші координати. Ця функція є взаємно однозначною, тому що переводить різні елементи в різні. Знайдемо функцію, обернену до даної:

$$f = \{\langle x, y\rangle | y = 4x + 3, \quad x, y \in R\};$$
$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | x = 4y + 3, \quad x, y \in R\};$$

$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | 4y = x - 3, \quad x, y \in R\};$$
$$f^{-1} = \left\{\langle y, x\rangle \middle| y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}; \quad x, y \in R\right\}.$$

<u>Завдання 6.</u> Знайти істинносте значення наступного висловлювання: $P \wedge Q \to \sim ((Q \vee \sim R) \to (Q \vee P))$, якщо $P = 1$, $Q = 0$, $R = 1$.

Розв'язання: Скористаємося таблицями істинності, які приведені у розділі 3.1:

$$P \wedge Q \to \sim ((Q \vee \sim R) \to (Q \vee P))$$

1 0 0 1 0 1

0

0 0

1

0

0

1

Отже, дане висловлення істинне.

<u>Завдання 7.</u> Скласти таблицю істинності для наступного висловлювання: $(\sim Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee (R \to Q))$.

Розв'язання: Скористаємося таблицями істинності, які приведені у розділі 3.1 і виконаємо всі дії послідовно:

P	Q	R	$\sim Q$	$\sim Q \wedge R$	$R \to Q$	$P \vee (R \to Q)$	$(\sim Q \wedge R) \leftrightarrow\leftrightarrow (P \vee (R$
0	0	0	1	0	1	1	**0**
0	0	1	1	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	1	1	**0**
0	1	1	0	0	1	1	**0**
1	0	0	1	0	1	1	**0**
1	0	1	1	1	0	1	**1**
1	1	0	0	0	1	1	**0**
1	1	1	0	0	1	1	**0**

Завдання 8. Обчислити значення функції

$\psi_5(\varphi_2(x_3),\psi_{13}(x_2,x_1))$ на зазначеному наборі змінних: $(0,1,1)$.

Розв'язання: Скористаємося таблицями 4.1, 4.2:

$\varphi_2(x_3) = \varphi_2(1) = 0;$

$\psi_{13}(x_2,x_1) = \psi_{13}(1,0) = 0;$

$\psi_5(\varphi_2(x_3),\psi_{13}(x_2,x_1)) = \psi_5(\varphi_2(1),\psi_{13}(1,0)) = \psi_5(0,0) = 0.$

Отже, функція на зазначеному наборі змінних хибна.

Завдання 9. Логічну функцію $f(x_1,x_2,x_3) = (\bar{x}_1 \downarrow x_3)(x_1 \to x_2)$ представити булевою формулою у вигляді ДДНФ і у вигляді ДКНФ:

Розв'язання: Побудуємо таблицю істинності функції за допомогою таблиць 4.1, 4.2:

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 \downarrow x_3$	$x_1 \to x_2$	$\overline{x_1 \to x_2}$	$(\bar{x}_1 \downarrow x_3)(x_1 \to x_2)$
0	0	0	1	0	1	0	**0**
0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	1	0	1	0	1	0	**0**
0	1	1	1	0	1	0	**0**
1	0	0	0	1	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0	1	**0**
1	1	0	0	1	1	0	**0**
1	1	1	0	0	1	0	**0**

Скористаємося наслідками 1,2 до теореми 4.1 та запишемо ДДНФ та ДКНФ.

Бачимо, що функція має лише один одиничний набір змінних, тому ДДНФ буде мати одну диз'юнкцію кон'юкцій. Зауважимо, що змінні, які дорівнюють одиниці беремо без заперечення, а змінні, які дорівнюють нулю – із запереченням. Отже, ДДНФ функції має вигляд:

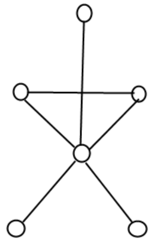
$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Функція має сім нульових наборів змінних, тому ДКНФ буде мати сім кон'юкцій диз'юнкцій. Зауважимо, що змінні, які дорівнюють одиниці беремо із запереченням, а змінні, які дорівнюють нулю – без заперечення. Отже, ДКНФ функції має вигляд:

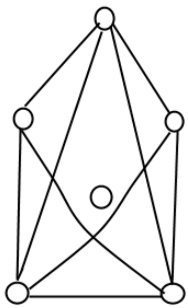
$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge$$

$$\wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

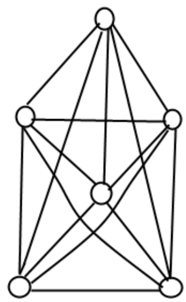
Завдання 10. Визначити доповнення $\overline{G}$ графа G. Побудувати повний граф, якщо G має вигляд:



Розв'язання: Скористаємося визначеннями 5.7, 5.8. Побудуємо доповнення $\overline{G}$ графу G. Отже повний граф має вигляд:

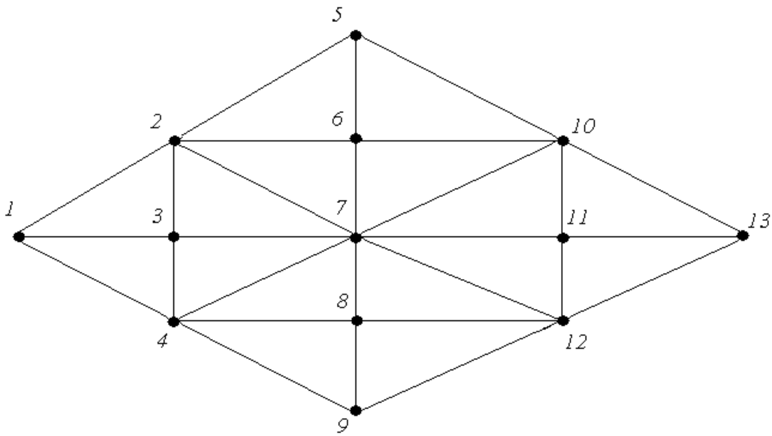


$\overline{G}$



G

Завдання 11. Для неорієнтованого графу G виконати операції видалення вершин $\{4; 5; 11\}$ та ребер $\{(1; 2); (2; 6); (7; 8); (10; 13)\}$. Побудувати отриманий граф.



Скласти матрицю суміжності на матрицю інцидентності. Написати маршрут, ланцюг, простий ланцюг, цикл, простий цикл. Знайти:

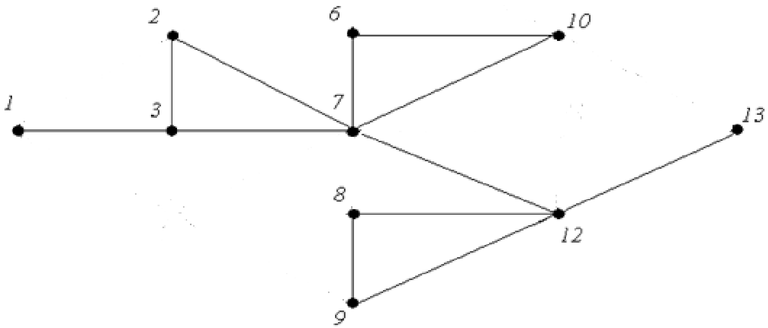
а) число вершин і число ребер;

б) степені всіх вершин;

в) центр, периферійні вершини, радіус і діаметр;

г) точки зчленування і мости.

Розв'язання: Виконаємо операції видалення вказаних вершин та ребер. Отриманий граф набуває вигляду:



Звернемося до п.6.2 методичних вказівок та опишемо відношення інцидентності графа трьома способами. ***Матриця інцидентності*** графа має вигляд:

	(1;3)	(2;3)	(2;7)	(3;7)	(6;7)	(6;10)	(7;10)	(7;12)	(8;9)	(8;12)	(9;12)	(12;13)
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
10	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Запишемо ***матрицю суміжності*** графа:

	1	2	3	6	7	8	9	10	12	13
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
7	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
9	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
10	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

І, нарешті, ***список ребер***:

Р		(1;3)	(2;3)	(2;7)	(3;7)	(6;7)	(6;10)	(7;10)	(7;12)	(8;9)	(8;12)	(9;12)	(12;13)
В	П	1	2	2	3	6	6	7	7	8	8	9	12
	К	3	3	7	7	7	10	10	12	9	12	12	13

За визначенням 5.16 приведемо приклад ***маршруту*** довжини 10: $M(1;3;7;2;3;7;10;6;7;12;13)$. Тут початок маршруту – вершина 1, а кінець – вершина 13.

Скористаємося визначенням 5.19 та наведемо приклад ***ланцюга*** *M*(1;3;2;7;12;8;9;12;13) та ***простого ланцюга*** *M*(1;3;2;7;12;9;8).

За визначенням 5.20 одним з ***циклів*** є маршрут *M*(7;6;10;7;2;3;1;3;7), а приклад ***простого циклу*** – це маршрут *M*(7;2;3;7).

Число вершин графу – 10; число ребер – 12.

Знайдемо степені всіх вершин. Для цього скористаємося визначенням 5.9:

$deg 1 = 1;\ deg 2 = 2;\ deg 3 = 3;\ deg 6 = 2;\ deg 7 = 5;$

$deg 8 = 2;\ deg 9 = 2;\ deg 10 = 2;\ deg 12 = 4;\ deg 13 = 1.$

Виконаємо перевірку за теоремою 5.1:

$$\sum_{v\in G} \deg v = 1 + 2 + 3 + 2 + 5 + 2 + 2 + 2 + 4 + 1 =$$

$$= 24 = 2 \cdot 12,$$

тобто сумарний степінь всіх вершин вдвічі перевищує кількість ребер .

Для знаходження центра, периферійних вершини, радіусу і діаметру графа, необхідно побудувати ***матрицю відстаней***:

	1	2	3	6	7	8	9	10	12	13
1	0	2	1	3	2	4	4	3	3	4
2	2	0	1	2	1	3	3	2	2	3
3	1	1	0	2	1	3	3	2	2	3
6	3	2	2	0	1	3	3	1	2	3

7	2	1	1	1	0	2	2	1	1	2
8	4	3	3	3	2	0	1	3	1	2
9	4	3	3	3	2	1	0	3	1	2
10	3	2	2	1	1	3	3	0	2	3
12	3	2	2	2	1	1	1	2	0	1
13	4	3	3	3	2	2	2	3	1	0

Знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа:

$l(1) = 4$; $l(2) = 3$; $l(3) = 3$; $l(6) = 3$; $l(7) = 2$; $l(8) = 4$;

$l(9) = 4$; $l(10) = 3$; $l(12) = 3$; $l(13) = 4$.

Звідси за визначенням 5.35 центр складається з однієї вершини – 7; за визначенням 5.36 знаходимо периферійні вершини – 1, 8, 9, 13. За визначенням 5.40 знаходимо радіус $R(G) = 2$ та діаметр $D(G) = 4$ графа.

Завдання 12. Автомат Мілі A заданий діаграмою на рис. 8.1, де a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ – параметри, конкретні значення яких відповідають номеру варіанта в наведеній далі таблиці. Врахувавши конкретні значення параметрів, зобразити діаграму автомату A для відповідного варіанта. Записати його вхідний X і вихідний Y алфавіти й алфавіт станів S, а також

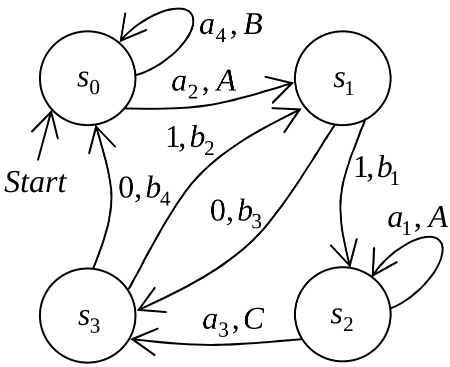


Рис. 8.1

початковий стан s_0. Скласти його таблицю переходів, таблицю виходів і автоматну таблицю.

Побудувати еквівалентний автомат Мура $\overline{A}$. Записати його вхідний $\overline{X}$ і вихідний $\overline{Y}$ алфавіти й алфавіт станів $\overline{S}$, а також початковий стан $\overline{s}_0$. Скласти його розширену таблицю переходів і зобразити діаграму.

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
0	1	1	0	A	B	C	B

Розв'язання. Діаграма автомату A зображена на рис. 8.2.

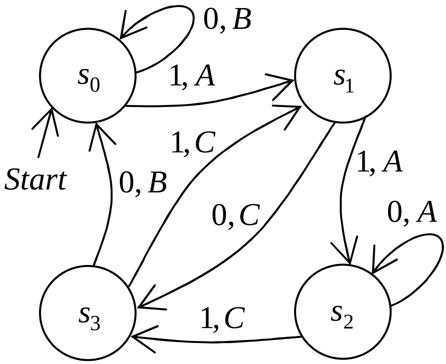


Рис. 8.2

Вхідний і вихідний алфавіти:

$X = \{0,1\}$; $Y = \{A, B, C\}$.

Алфавіт станів:

$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$.

Функція виходів $y(t) = g(s(t-1), x(t))$:

$g(s_0, 0) = B$;

$g(s_0, 1) = A$;

$g(s_1, 0) = C$; $g(s_1, 1) = A$; $g(s_2, 0) = A$; $g(s_2, 1) = C$; $g(s_3, 0) = B$; $g(s_3, 1) = C$.

Функція переходів $s(t) = f(s(t-1), x(t))$:

$$f(s_0,0)=s_0;\quad f(s_0,1)=s_1;\quad f(s_1,0)=s_3;\quad f(s_1,1)=s_2;$$
$$f(s_2,0)=s_2;\quad f(s_2,1)=s_3;\quad f(s_3,0)=s_0;\quad f(s_3,1)=s_1.$$

За початковий стан прийнято s_0.

Далі наведено таблицю переходів, таблицю виходів і автоматну таблицю автомату Мілі A:

Таблиця переходів автомату Мілі A

$X \backslash S$	s_0	s_1	s_2	s_3
0	s_0	s_3	s_2	s_0
1	s_1	s_2	s_3	s_1

Таблиця виходів автомату Мілі A

$X \backslash S$	s_0	s_1	s_2	s_3
0	B	C	A	B
1	A	A	C	C

Таблиця автомату Мілі A (переходів і виходів)

$X \backslash S$	s_0	s_1	s_2	s_3
0	s_0, B	s_3, C	s_2, A	s_0, B
1	s_1, A	s_2, A	s_3, C	s_1, C

Для даного автомату Мілі A одержуємо наступний еквівалентний автомат Мура $\overline{A}$:

1) Вхідний і вихідний алфавіти:

$$\overline{X} = X = \{0,1\}; \qquad \overline{Y} = Y = \{A,B,C\}.$$

2) Алфавіт станів $\overline{S}$:

$$S^{(0)} = \{(s_0, B)\} = \{\overline{s}_0\}; \quad S^{(1)} = \{(s_1, A), (s_1, C)\} = \{\overline{s}_1, \overline{s}_2\};$$

$$S^{(2)} = \{(s_2, A)\} = \{\overline{s}_3\}; \quad S^{(3)} = \{(s_3, C)\} = \{\overline{s}_4\};$$

$$\overline{S} = S^{(0)} \bigcup S^{(1)} \bigcup S^{(2)} \bigcup S^{(3)} = \{\overline{s}_0, \overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3, \overline{s}_4\}.$$

3) Функція виходів $\overline{g}(\overline{s}_r)$:

$$\overline{g}(\overline{s}_0) = B; \ \overline{g}(\overline{s}_1) = A; \overline{g}(\overline{s}_2) = C; \ \overline{g}(\overline{s}_3) = A; \ \overline{g}(\overline{s}_4) = C.$$

4) Функція переходів $\overline{f}(\overline{s}_r, x_p)$:

$$\overline{f}(\overline{s}_0, 5) = \overline{s}_0; \quad \overline{f}(\overline{s}_1, 5) = \overline{s}_0; \quad \overline{f}(\overline{s}_0, 1) = \overline{s}_2; \quad \overline{f}(\overline{s}_1, 1) = \overline{s}_2;$$

$$\overline{f}(\overline{s}_0, 2) = \overline{s}_3; \quad \overline{f}(\overline{s}_1, 2) = \overline{s}_3; \quad \overline{f}(\overline{s}_2, 1) = \overline{s}_3; \quad \overline{f}(\overline{s}_2, 2) = \overline{s}_4;$$

$$\overline{f}(\overline{s}_2, 5) = \overline{s}_1; \quad \overline{f}(\overline{s}_3, 1) = \overline{s}_4; \quad \overline{f}(\overline{s}_3, 2) = \overline{s}_5; \quad \overline{f}(\overline{s}_3, 5) = \overline{s}_1;$$

$$\overline{f}(\overline{s}_4, 1) = \overline{s}_5; \quad \overline{f}(\overline{s}_4, 2) = \overline{s}_0; \quad \overline{f}(\overline{s}_4, 5) = \overline{s}_1;$$

$$\overline{f}(\overline{s}_5, 1) = \overline{s}_0; \quad \overline{f}(\overline{s}_5, 2) = \overline{s}_1; \quad \overline{f}(\overline{s}_5, 5) = \overline{s}_1.$$

5) За початковий стан прийнято $\overline{s}_0$.

Діаграму синтезованого автомату Мура $\overline{A}$ зображено на рис. 8.3, а далі наведено розширену таблицю переходів.

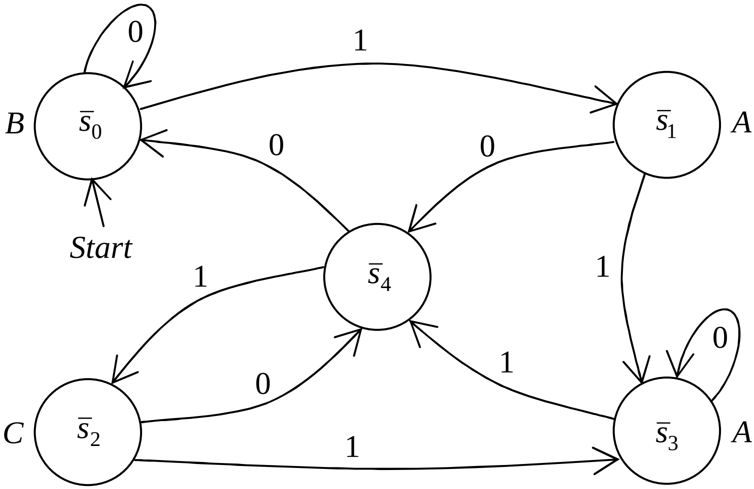


Рис. 8.3

Розширена таблиця переходів
автомату Мура $\overline{A}$

Y	B	A	C	A	C
$X \backslash \overline{S}$	$\overline{s}_0$	$\overline{s}_1$	$\overline{s}_2$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_4$
0	$\overline{s}_0$	$\overline{s}_4$	$\overline{s}_4$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_0$
1	$\overline{s}_1$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_3$	$\overline{s}_4$	$\overline{s}_2$

Завдання 13. Розв'язати рівняння $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^{3}$.

Розв'язання: За формулами (7.3), (7.4) маємо

$$C_{x+8}^{x+3} = \frac{(x+8)!}{\big((x+8)-(x+3)\big)!\,(x+3)!} = \frac{(x+8)!}{5!\,(x+3)!} =$$

$$= \frac{1}{120}(x+8)(x+7)(x+6)(x+5)(x+4);$$

$$A_{x+6}^{3} = \frac{(x+6)!}{(x+6-3)!} = \frac{(x+6)!}{(x+3)!} = (x+6)(x+5)(x+4).$$

Підставимо отримані вирази у рівняння:

$$\frac{1}{120}(x+8)(x+7)(x+6)(x+5)(x+4) =$$

$$= 5(x+6)(x+5)(x+4).$$

$$(x+6)(x+5)(x+4)[(x+8)(x+7)-600] = 0;$$

звідки

$$x_1 = -6;\ \ x_2 = -5;\ \ x_3 = -4;$$

$$(x+8)(x+7) - 600 = 0,$$

або $x^2 + 15x - 544 = 0,$

звідки

$$x_4 = -32,\ x_5 = 17.$$

Усі від’ємні значення відпадають, бо $x + 8 \geq 5$, тобто відповідь $x = 17$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 376 с.
2. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. – Москва – С.- Петербург – Киев.: Издательский дом “Вильямс”, 2003.– 958 с.
3. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
4. Донской В.И. Дискретная математика. - Симферополь: Сонат, 2000– 360с.
5. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. Основи дискретної математики. – К.:Наукова думка, 2002. – 578 с.
6. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: Энергия, 1980. – 344 с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М.: Наука, 1976. – 320 с.
8. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. - М.: Логос, 2002. – 238 с.
9. Тевяшев А.В., Гусарова И.Г. Основы дискретной математики в примерах и задачах. - Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
10. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. - М.: Наука, 1979. -384 с.
11. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977, - 205 с.
12. Коваленко Л.Б., Станішевський С.О. Дискретна математика. – Харків: ХНАМГ, 2006. -192 с.
13. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
14. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М: Наука, 1990. – 384 с.

Додаток

МОДУЛЬНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Завдання 1. Для кожної із вказаних множин знайти булеан та потужність множини:

1.1 Задати різними способами множину натуральних чисел, кратних 3 і не перевищуючих 35.

1.2 Задати різними способами множину обласних центрів України.

1.3 Задати різними способами множину днів тижня.

1.4 Перелічите елементи множини $\{x | x \quad \text{ціле і } x^3 < 100\}$.

1.5 Перелічите елементи множини

$\{x | x - \text{додатне непарне ціле} \quad \text{число}, \text{ і } x < 35\}$

1.6 Перелічите елементи множини

$\{x | x$ – улюблені свята вашої родини$\}$.

1.7 Опишіть множину $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ за допомогою характери-тичної властивості.

1.8 Опишіть множину $\{\text{березень}, \text{квітень}, \text{травень}\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.9 Опишіть множину $\{1, 5, 25, 125, 625, 3125\}$ за допомогою характеристичної властивості.

1.10 Опишіть множину $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Завдання 2.

2.1. $A = \{0, 3, 5, \{6, 9\}\}$, $B = \{2, 3, 9\}$, $C = \{0, 2, 3, 6\}$. Визначити наступні множини: $B - C$, $A \cap B$, $A + C$, $(A \cup B) - C$.

2.2. $A = \{1, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{0, \{3, 4\}, \{5, 6\}, 8\}$. Визначити наступні множини: $A - B$, $A \cup C$, $A + B$, $(A \cap B) \cup (B - C)$.

2.3. $A=\{2, 3, \{8, 9\}\}$, $B=\{0, \{1, 2\}, 3, 5\}$, $C=\{2, 5, 8\}$. Визначити наступні множини: $A \cup B$, $C-B$, $A+C$, $B+(A \cap C)$.

2.4. $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A \cap B$, $B \cup C$, $A-C$, $A \cup (B \cap C)$.

2.5. $A=\{1, 2, 7, 8, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 7\}$, $C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Визначити наступні множини: $A \cap C$, $B-C$, $A+C$, $\overline{A} \cap (B \cup C)$.

2.6. $A=[0, 6)$, $B=[1, 7)$, $C=[2, 8]$. Визначите наступні множини: $C-B$, $A+C$, $\overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{(A \cap B)}$.

2.7. $A=(3, 7)$, $B=(1,5]$, $C=[4, 8]$. Визначити наступні множини: $A-B$, $B+C$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap (B \cup C)$.

2.8. $A=(5, 8)$, $B=[2, 6)$, $C=(4, 7]$. Визначити наступні множини: $\overline{A \cap C}$, $A-B$, $B \cup C$, $(A \cap B)-\overline{C}$.

2.9. $A=(3, 8)$, $B=[0, 9)$, $C=(2, 5]$. Визначити наступні множини: $A \cap B$, $A+C$, $A \cup (B \cap C)$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

2.10. $A=[0, 9)$, $B=[2, 5)$, $C=[1, 11]$. Визначити наступні множини: $B \cup C$, $A-C$, $A+B$, $(A \cup B)-C$.

Завдання 3. Для кожної з наведених нижче множин використайте діаграми Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини:

3.1. $\overline{(A \cap B)}$; 3.2. $\overline{(A \cup B)}$;

3.3. $B-\overline{A}$; 3.4. $(A \cup B)-(A \cap B)$;

3.5. $B-(A \cap B)$; 3.6. $\overline{(A \cap B \cap C)}$;

3.7. $A-(B \cap C)$; 3.8. $(A \cap B)+C$;

3.9. $(A \cup B \cup C)-(A \cap B \cap C)$; 3.10. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Завдання 4. Опишіть множини, що відповідають зафарбованої частині кожної діаграми Венна (рис. 9.1):

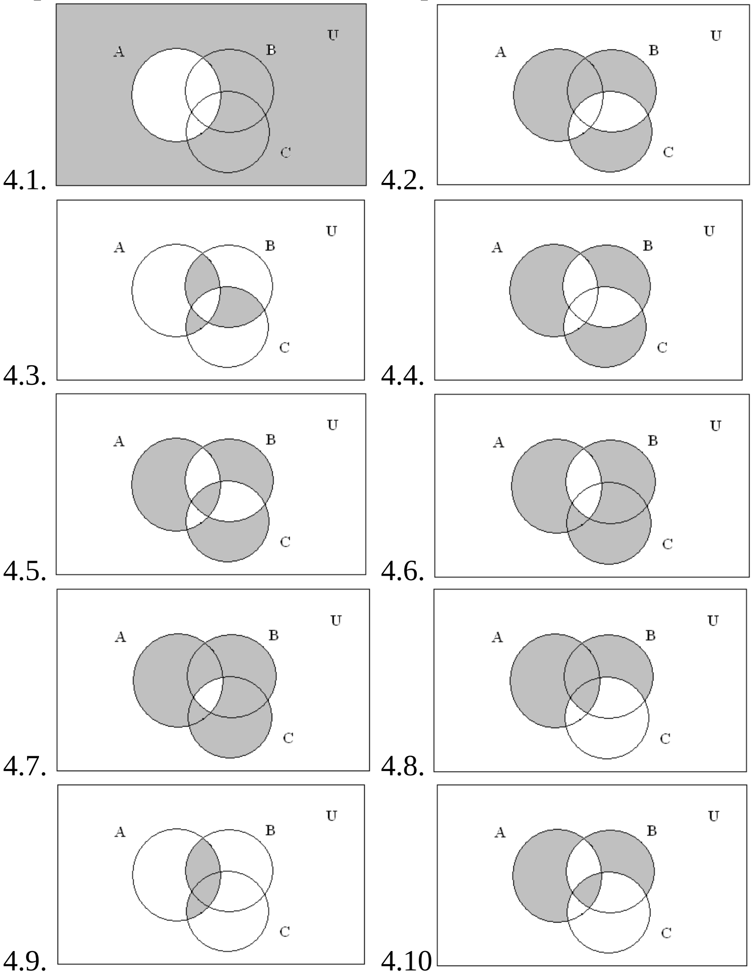


Рис. 9.1.

Завдання 5. З'ясуйте, які з наведених нижче відношень є функціями. Визначте властивості функцій. Для взаємнооднозначних функцій знайдіть обернені:

5.1. $f = \{\langle x, y\rangle | y = 5x - 1, \quad x, y \in R\}$.

5.2. $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1, \quad x \in R, y \in R^+\right\}$.

5.3. $f = \{\langle x, y\rangle | x^2 + (y-1)^2 = 9, \ x, y \in R^+\}$.

5.4. $f = \{\langle x, y\rangle | y = \ln x, \quad x \in R^+, y \in R\}$.

5.5. $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad x, y \in R^+\right\}$.

5.6. $f = \{\langle x, y\rangle | y = e^x, \quad x \in R, y \in R^+\}$.

5.7. $f = \{\langle x, y\rangle | 4x + 5y - 20 = 0, \quad x, y \in R\}$.

5.8. $f = \{\langle x, y\rangle | (x-4)^2 + y^2 = 25, \ x, y \in R\}$.

5.9. $f = \{\langle x, y\rangle | y = 7x - 3, \ x, y \in R\}$.

5.10. $f = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \ x, y \in R^+\right\}$.

Завдання 6. Знайти істинностне значення кожного з наступних висловлень:

6.1. $P \to (Q \vee \sim R \leftrightarrow P \wedge R)$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 0$.

6.2. $(\sim Q \wedge \sim R \leftrightarrow P) \vee Q$, якщо $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$.

6.3. $P \wedge R \to \sim ((Q \vee \sim P) \leftrightarrow (Q \vee R))$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 1$.

6.4. $Q \to (R \to \sim P \vee R \leftrightarrow Q)$, якщо $P = 0$, $Q = 1$, $R = 1$.

6.5. $(\sim Q \vee \sim R \to Q) \wedge P \leftrightarrow (R \wedge P)$, якщо $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

6.6. $P \to \sim(\sim Q \wedge P) \leftrightarrow (R \vee Q \to \sim P)$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 1$.

6.7. $\sim (P \wedge R) \to \sim ((Q \vee P) \leftrightarrow (Q \vee \sim R))$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 0$.

6.8. $(P \vee \sim R) \to (Q \vee \sim R) \leftrightarrow (P \wedge R)$, якщо $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$.

6.9. $\sim (Q \wedge \sim R) \leftrightarrow (P \vee Q \to R)$, якщо $P = 1$, $Q = 1$, $R = 0$.

6.10. $(R \to \sim P \vee \sim R \leftrightarrow Q) \to \sim R$, якщо $P = 0$, $Q = 1$, $R = 0$.

Завдання 7. Скласти таблицю істинності для кожного з наступних висловлень:

7.1. $(R \to P) \vee \sim R \to Q \wedge P$.

7.2. $R \leftrightarrow \sim Q \to (P \vee (Q \wedge \sim R))$.

7.3. $Q \vee P \to \sim (Q \wedge P) \leftrightarrow R$.

7.4. $P \to (P \to (Q \leftrightarrow \sim (R \vee P)))$.

7.5. $(Q \vee \sim R) \to (P \wedge Q \leftrightarrow \sim R)$.

7.6. $(P \vee \sim R) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q \vee R)$.

7.7. $Q \vee P \to Q \vee \sim (R \wedge P)$.

7.8. $P \to (Q \to (R \to \sim (Q \wedge P)))$.

7.9. $(R \to P) \vee Q \leftrightarrow (R \to Q \wedge P)$.

7.10. $(Q \vee P \to R) \to (\sim Q \wedge P)$.

Завдання 8. Обчислити значення функцій на зазначених наборах:

8.1. $\phi_6(\phi_1(x_1, x_2), \phi_{11}(x_3, x_2))$, $(0,1,0)$.

8.2. $\phi_{13}(\phi_8(x_3, x_1), \phi_1(x_2, x_1))$, $(1,1,0)$.

8.3. $\phi_{11}(\varphi_2(x_3), \phi_7(x_1, x_2))$, $(0,0,1)$.

8.4. $\phi_7(\phi_4(x_3, x_1), \varphi_3(x_2))$, $(0,1,1)$.

8.5. $\phi_{13}(\phi_1(x_1, x_2), \varphi_3(x_3))$, $(0,0,0)$.

8.6. $\phi_2(\varphi_2(x_1), \phi_6(x_2, x_3))$, $(1,0,1)$.

8.7. $\phi_8(\varphi_3(x_1), \phi_6(x_3, x_2))$, $(1,1,1)$.

8.8. $\phi_5(\phi_1(x_3, x_2), \phi_9(x_1, x_2))$, $(1,1,0)$.

8.9. $\phi_2(\phi_5(x_3, x_2), \varphi_4(x_1))$, $(0,1,1)$.

8.10. $\phi_7(\phi_{10}(x_1, x_3), \phi_3(x_2, x_1))$, $(1,0,0)$.

Завдання 9. Логічну функцію представити булевою формулою у вигляді ДДНФ і ДКНФ:

9.1. $f(x_1, x_2, x_3) = (\bar{x}_1 \oplus x_2)(x_3 \oplus 1)$.

9.2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \mid \overline{(x_3 \vee x_2)}$.

9.3. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2)(x_3 \oplus x_1)$.

9.4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus (x_1\bar{x}_2)$.

9.5. $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \vee x_2)} \downarrow x_3$.

9.6. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus 1)(\bar{x}_2 \vee x_3)$.

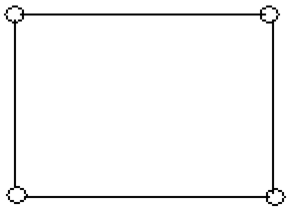
9.7. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1\bar{x}_3) \mid (\bar{x}_2 x_3)$.

9.8. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2) \downarrow \overline{(x_1 \vee x_3)}$

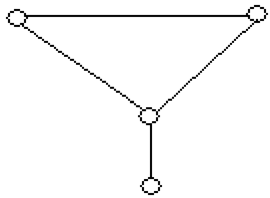
9.9. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \leftrightarrow (x_3 \downarrow \bar{x}_2)$.

9.10. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | x_2) \leftrightarrow \bar{x}_3$.

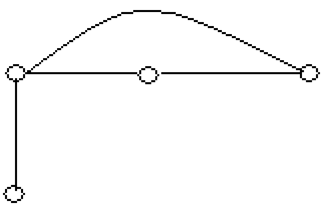
Завдання 10. Визначити доповнення $\overline{G}$ графів G, зображених на рис. 9.2. Побудувати повні графи.



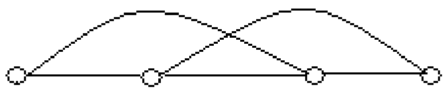
10.1



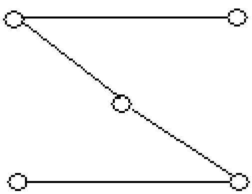
10.2



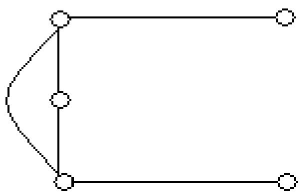
10.3



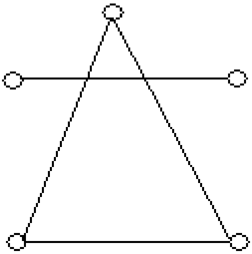
10.4



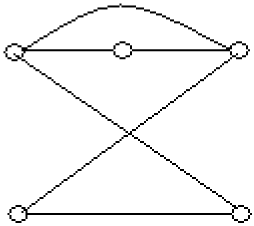
10.5



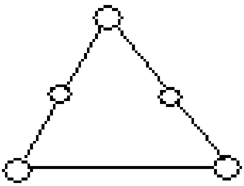
10.6



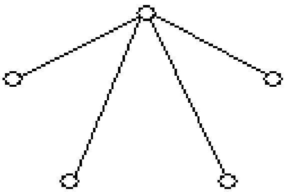
10.7



10.8



10.9



10.10

Рис. 9.2.

Завдання 11. Для неорієнтованого графу *G*, зображеного на рисунку 9.3, виконати вказані операції видалення вершин та ребер.

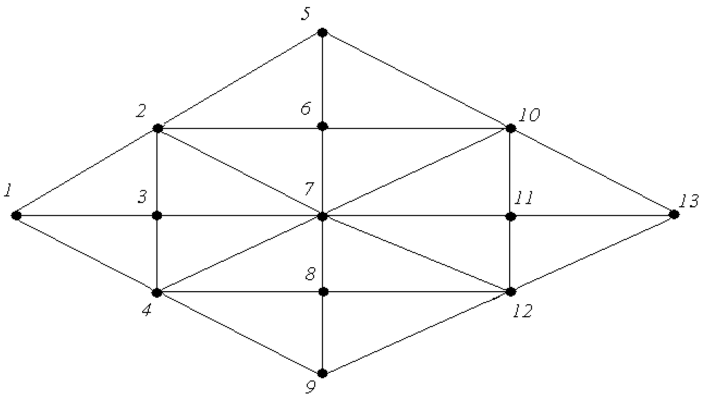


Рис.9.3.

Побудувати отриманий граф. Скласти матрицю суміжності на матрицю інцидентності. Написати маршрут, ланцюг, простий ланцюг, цикл, простий цикл. Знайти:

а) число вершин і число ребер;

б) степені всіх вершин;

в) центр, периферійні вершини, радіус і діаметр;

г) точки зчленування і мости.

№ в-та	Видалити в графі G вершини $\{i\}$	Видалити в графі G ребра $\{(i,j)\}$
1	$\{1;3;9\}$	$\{(6;7);(7;10);(10;11);(10;13)\}$
2	$\{2;3;13\}$	$\{(4;8);(6;7);(7;8);(10;11)\}$
3	$\{4;5;9\}$	$\{(1;2);(6;10);(10;11);(11;13)\}$
4	$\{5;9;11\}$	$\{(1;4);(4;7);(4;8);(10;13)\}$
5	$\{2;8;10\}$	$\{(3;7);(4;7);(9;12);(12;13)\}$
6	$\{3;10;12\}$	$\{(2;5);(2;6);(8;9);(7;11)\}$
7	$\{5;10;11\}$	$\{(1;4);(4;7);(4;8);(9;12)\}$
8	$\{3;4;13\}$	$\{(2;5);(6;10);(10;11);(11;12)\}$
9	$\{1;8;12\}$	$\{(2;7);(5;6);(6;7);(10;13)\}$
10	$\{2;8;13\}$	$\{(3;7);(6;7);(9;12);(11;12)\}$

Завдання 13. Автомат Мілі A заданий діаграмою на рис. 9.4, де a_i, b_i $(i=1,2,3,4)$ – параметри, конкретні значення яких відповідають номеру варіанта в наведеній далі таблиці. Врахувавши конкретні значення параметрів, зобразити діаграму автомату A для відповідного варіанта. Записати його вхідний X і вихідний Y алфавіти й алфавіт станів S, а також

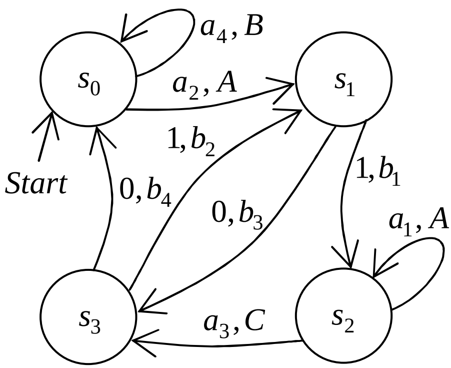


Рис. 9.4

початковий стан s_0. Скласти його таблицю переходів, таблицю виходів і автоматну таблицю.

Побудувати еквівалентний автомат Мура $\overline{A}$. Записати його вхідний $\overline{X}$ і вихідний $\overline{Y}$ алфавіти й алфавіт станів $\overline{S}$, а також початковий стан $\overline{s}_0$. Скласти його розширену таблицю переходів і зобразити діаграму.

№ в-та	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
1	0	0	1	1	A	A	B	C
2	0	0	1	1	B	A	B	C
3	0	1	1	0	C	B	C	A
4	0	1	1	0	B	A	A	C
5	0	1	1	0	C	C	A	B
6	0	0	1	1	A	C	C	A
7	1	0	0	1	B	A	C	A
8	1	0	0	1	C	B	A	B
9	1	0	0	1	A	B	C	B
10	1	1	0	0	C	A	C	B

Завдання 13. Розв’язати рівняння.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	а) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$; б) $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$	6	а) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; б) $3C_{2x}^{x-1} = 5C_{2x-1}^x$
2	а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; б) $A_{x+1}^6 P_{x-5} = 72P_{x-1}$	7	а) $C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2 = 7(x-2)$; б) $A_x^4 P_{x-4} = 42P_{x-2}$
3	а) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; б) $P_{x+3} = 720A_x^5 P_{x-5}$	8	а) $C_{x+4}^{x+1} - C_{x+3}^x = 15(x-2)$; б) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$

4	а) $P_{x+2} = 210A_{x-1}^{x-4}\cdot P_3$; б) $17C_{2x-1}^{x} = 9C_{2x}^{x-1}$	9	а) $7A_{x+1}^{x-1} + 14P_{x-1} = 30P_x$; б) $13C_{2x}^{x+1} = 7C_{2x+1}^{x-1}$
5	а) $A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$; б) $A_x^3 + A_x^2 = \frac{9}{5}A_{x+1}^2$	10	а) $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}$; б) $C_x^2 + C_x^3 = 15(x-1)$

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Іванович Колосов,
Людмила Борисівна Коваленко,
Степан Олександрович Станішевський,
Анатолій Вікторович Якунін

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Відповідальний за випуск: М.Й. Кадець

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2009, поз. 186 М

Підп. до друку 17.11.09 Формат 60x84 1/16 Папір офісний
Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк.5,8 Обл.-вид.арк.6,1
Тираж 100 прим. Зам. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12